KOMPLEKSNI BROJEVI

Kvadratna jednačina
$$x^2 + 1 = 0$$
nema rešenja u skupu realnih brojeva zato što za svaki realan broj x važi da je x^2 nenegativan broj, pa je $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Ispostavilo se da je veoma korisno uvesti novi matematički objekat, **imaginarnu jedinicu** koja se označava sa i, na sledeći način:
$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Na osnovu definicije imaginarne jedinice, sledi da je
$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Primer: Izračunati i^{100}, i^{34}, i^{41}, i^{2095}.

Kompleksan broj je izraz oblika $a + bi$, gde su a i b *realni brojevi*, a i je imaginarna jedinica.

Uobičajeno je da se kompleksni brojevi označavaju slovima z i w, a skup kompleksnih brojeva sa $\mathbb{C}$.

Ako je
$$\boxed{z = a + bi} \tag{1}$$
tada je a **realni deo** kompleksnog broja z, što označavamo $\mathfrak{Re}(z) = a$, a b je **imaginarni deo** kompleksnog broja z, u oznaci $\mathfrak{Im}(z) = b$.

Primer: Odrediti realni i imaginarni deo sledećih kompleksnih brojeva: $4 + 5i,\ 5 - 2i,\ -i + 1,\ -\dfrac{3}{7} + \sqrt{5}i,\ 8,\ 2i.$

Kada je $\mathfrak{Im}(z) = 0$, onda je z realan broj, a kada je $\mathfrak{Re}(z) = 0$, onda je z

čisto imaginaran broj $(3i, -2i, \sqrt{2}i, -\sqrt{3}i, \frac{1}{2}i, \dots)$.

Dakle, svaki kompleksan broj je određen sa dva realna broja, tako da su kompleksni brojevi uređeni parovi realnih brojeva, pri čemu je uobičajeno da kompleksni broj $z = (a, b)$ zapisujemo u **algebarskom obliku** (1).

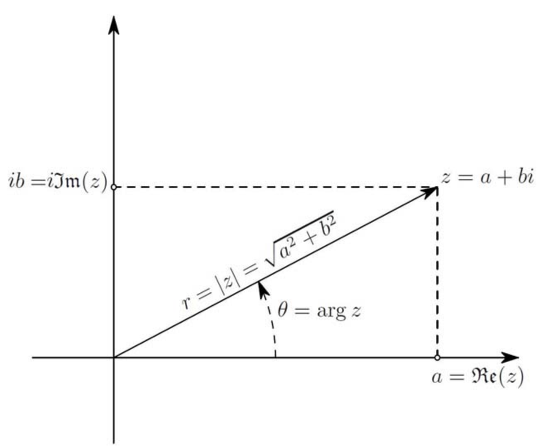
Jednakost kompleksnih brojeva u algebarskom obliku:

Dva kompleksna broja z i w su **jednaka** ako i samo ako je

$$\mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(w) \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(w).$$

S obzirom da je svaki kompleksan broj $a + bi$ određen parom realnih brojeva (a, b), onda se svakom kompleksnom broju može jednoznačno dodeliti jedna tačka (a, b) koordinatne ravni i obrnuto, svakoj tački kompleksan broj.

Ravan u kojoj se predstavljaju kompleksni brojevi se zove kompleksna ravan ili Gausova ravan i u njoj se x-osa zove **realna osa**, a y-osa **imaginarna osa**.



Slika 1: Kompleksni broj $z = a + bi$

Može se reći i da svakom kompleksnom broju $z = a + bi$ u kompleksnoj ravni jednoznačno odgovara **vektor** $\overrightarrow{Oz}$ čija je početna tačka u koordinatnom početku, a krajnja tačka ima koordinate (a, b).

Intenzitet vektora $\overrightarrow{Oz}$ se naziva **moduo kompleksnog broja z**

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2},}$$

a ugao θ koji taj vektor zaklapa sa pozitivnim smerom realne ose se naziva **argument kompleksnog broja z** i označava sa

$$\boxed{\arg(z) = \theta.}$$

Svakom kompleksnom broju $z \neq 0$ odgovara samo jedna vrednost θ iz intervala $(-\pi, \pi]$, **glavna vrednost argumenta** koja je određena sa

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & a < 0 \wedge b \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & a < 0 \wedge b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0 \wedge b < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ovo sledi iz činjenice da za argument kompleksnog broja $z = a + bi$ važi jednačina

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a},$$

koja ima dva rešenja na intervalu $(-\pi, \pi]$ jer je osnovni period tangensa π. Prema tome, glavna vrednost argumenta $\arg(z) = \theta$ se određuje u zavisnosti od predznaka brojeva a i b, odnosno od toga u kom kvadrantu se nalazi tačka (a, b) koja odgovara kompleksnom broju z, što je zapisano u (2).

Napomena: ako je $z = a + bi$, $r = |z|$ i $\arg(z) = \theta$, onda očigledno važi

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta, \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

tako da se kompleksan broj z može napisati na sledeći način:

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta),}$$

što zovemo **trigonometrijskim oblikom kompleksnog broja** z.

Primer: Odrediti moduo i argument sledećih kompleksnih brojeva:
$z_1 = 1 + i,\ z_2 = 2 - 2i,\ z_3 = -1 + \sqrt{3}i,\ z_4 = -\sqrt{3} - i,\ z_5 = 4,\ z_6 = -1,$
$z_7 = 3i,\ z_8 = -2i$, a zatim ih napisati u trigonometrijskom obliku.

Jednakost kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku:

Dva kompleksna broja z i w su **jednaka** ako i samo ako

$$|z| = |w| \qquad \text{i} \qquad (\exists k \in Z) \quad \arg(z) = \arg(w) + 2k\pi.$$

Kompleksan broj

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

je **konjugovan** kompleksnom broju $z = a + bi$. Primetimo da važi

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \qquad \bar{\bar{z}} = z, \qquad z\bar{z} = |z|^2.$$

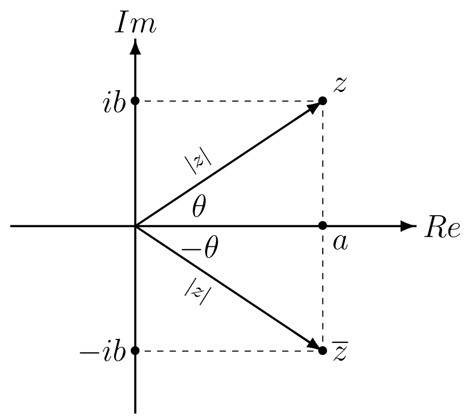
Primer: Odrediti konjugovani kompleksni broj za sledeće kompleksne brojeve: $z_1 = 12 + 10i,\ z_2 = 4 - 3i,\ z_3 = 2i,\ z_4 = i - 15,\ z_5 = 4.$

U geometrijskom smislu, konjugovani kompleksni broj $\bar{z} = a - bi$ je tačka koja je osnosimetrična tački z u odnosu na realnu osu. Za kompleksne brojeve z i $\bar{z}$ važi

$$|z| = |\bar{z}|, \qquad \arg(z) = -\arg(\bar{z}),$$

tako da je konjugovani kompleksni broj za $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dat sa

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$



Slika 2: z i njemu konjugovani kompleksan broj $\bar{z}$

jer je $\cos(-\theta) = \cos\theta$ i $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

Na osnovu Ojlerove formule $\cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}$, dobija se **eksponencijalni oblik kompleksnog broja**

$$\boxed{z = re^{\theta i}.}$$

Eksponencijalni oblik konjugovanog kompleksnog broja je $\bar{z} = re^{-\theta i}$.

Na osnovu Ojlerove formule važi

$$\cos\theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}.$$

Dakle, osim u algebarskom i vektorskom obliku, kompleksne brojeve po potrebi možemo predstavljati i u eksponencijalnom (Ojlerovom) ili trigonometrijskom obliku:

$$\boxed{z = \underbrace{a + bi}_{\text{algebarski oblik}} = \underbrace{\overrightarrow{0z}}_{\text{vektorski oblik}} = \underbrace{re^{\theta i}}_{\text{Ojlerov oblik}} = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{trigonometrijski oblik}}}$$

Osnovne operacije u skupu kompleksnih brojeva i njihova geometrijska interpretacija

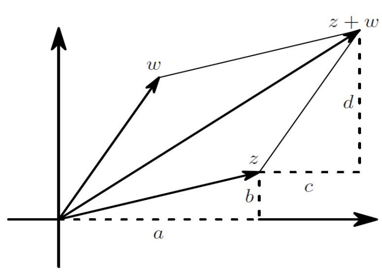
Neka su $z = a+bi$ i $w = c+di$ dva kompleksna broja. Sabiranje i oduzimanje kompleksnih brojeva je definisano na sledeći način:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

tj. važi

$$\mathfrak{Re}(z \pm w) = \mathfrak{Re}(z) \pm \mathfrak{Re}(w),$$
$$\mathfrak{Im}(z \pm w) = \mathfrak{Im}(z) \pm \mathfrak{Im}(w).$$

Može se uočiti da se kompleksni brojevi sabiraju kao vektori (po pravilu paralelograma): ako je $u = z \pm w$, tada je $\overrightarrow{0u} = \overrightarrow{0z} \pm \overrightarrow{0w}$.



Slika 3: Sabiranje kompleksnih brojeva $z = a + bi$ i $w = c + di$

Sabiranje kompleksnog broja z sa kompleksnim brojem w predstavlja translaciju vektora $\overrightarrow{0z}$ za vektor $\overrightarrow{0w}$.

Primer: Naći zbir i razliku kompleksnih brojeva: a) $z = 5+2i, w = -6+7i$, b) $z = \sqrt{2} - i,\ w = -2 + \sqrt{3}i$.

Kompleksne brojeve nije zgodno sabirati kada su zadati u eksponencijalnom ili trigonometrijskom obliku, pa ih u tom slučaju prvo zapisujemo u algebarskom obliku i zatim sabiramo.

Kod množenja kompleksnih brojeva se koristi definicija imaginarne jedinice $i^2 = -1$:

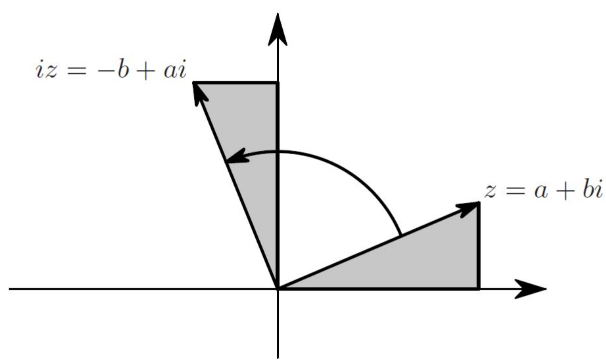
$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Primer: Naći proizvod kompleksnih brojeva $z = -2 + 4i$ i $w = 1 - 3i$.

Da bi se lakše razumela geometrijska interpretacija množenja dva kompleksna broja zadata u algebarskom obliku, prvo ćemo razmotriti množenje sa imaginarnom jedinicom i. Ako je $z = a + bi$, onda važi

$$iz = i(a + bi) = ia + bi^2 = ai - b = -b + ai.$$

Dakle, kompleksni broj iz se dobija rotacijom kompleksnog broja z za 90° oko koordinatnog početka (Slika 4).

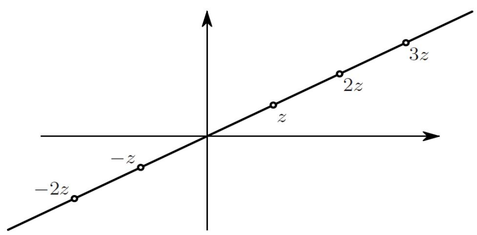


Slika 4: Množenje $z = a + bi$ sa i

Ako je p realan broj, onda množenje kompleksnog broja $z = a + bi$ sa p daje

$$pz = pa + pbi,$$

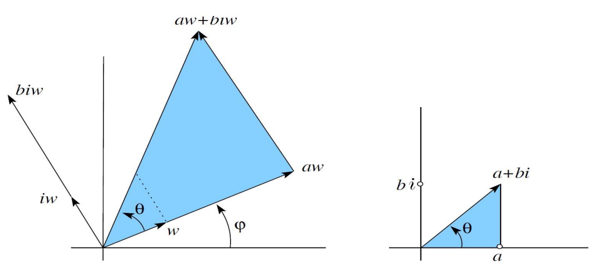
tako da kompleksni broj pz ima isti pravac kao i z, ali se njegova udaljenost od koordinatnog početka razlikuje. Ako je $p < 0$ onda vektor pz ima suprotan smer u odnosu na z.



Slika 5: Množenje realnog i kompleksnog broja

Sada ćemo množenje kompleksnih brojeva $z = a + bi$ i $w = c + di$ napisati u obliku:

$$zw = (a + bi)w = aw + biw.$$



Slika 6: Množenje $z = a + bi$ i $w = c + di$

Na Slici 6 desno je prikazan broj $a+bi$, a sa leve strane je prvo dat broj w, a zatim aw. Potom su konstruisani iw i biw, tako da je proizvod $zw = aw+biw$ konačno dobijen sabiranjem aw i biw.

Posmatrajući Sliku 6, može se zaključiti da su plavi trouglovi slični, iz čega sledi

$$|zw| = |z| \cdot |w| \qquad \text{i} \qquad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w).$$

Do ovog zaključka se može doći i množenjem kompleksnih brojeva u eksponencijalnom ili trigonometrijskom obliku:

$$\boxed{zw = re^{\theta i} \cdot \rho e^{\varphi i} = r\rho e^{(\theta+\varphi)i},}$$

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r\rho(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta)) \\ &= r\rho(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)). \end{aligned} \tag{3}$$

Dakle,

$$\boxed{zw = r\rho(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)).}$$

Za deljenje kompleksnih brojeva $z = a+bi$ i $w = c+di$ potreban nam je konjugovani kompleksni broj delioca, tj. $\bar{w}$:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \end{aligned}$$

Primer: Izračunati $\dfrac{z+w}{1+zw}$ ako je $z = i$, a $w = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Ako su kompleksni brojevi dati u eksponencijalnom obliku, onda sledi

$$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{re^{\theta i}}{\rho e^{\varphi i}} = \frac{r}{\rho}\, e^{(\theta-\varphi)i}.}$$

Za deljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku, prvo ćemo izračunati $\frac{1}{w}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w} &= \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} \\
&= \frac{1}{\rho}(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\
&= \frac{1}{\rho}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Sada na osnovu množenja u trigonometrijskom obliku (3) sledi

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= z \cdot \frac{1}{w} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot \frac{1}{\rho}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \\
&= \frac{r}{\rho}(\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)).
\end{aligned}$$

Dakle, deljenje kompleksnih brojeva u eksponencijalnom ili trigonometrijskom obliku se radi tako što se odgovarajući moduli podele, a argumenti oduzmu:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad \text{i} \qquad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w),$$

$$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}(\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)).}$$

Primer: Za $z = 1+i$ i $w = 1+\sqrt{3}\,i$ predstaviti zw i $\frac{z}{w}$ u trigonometrijskom obliku.

Stepenovanje i korenovanje kompleksnih brojeva

Kompleksni broj u algebarskom obliku se može stepenovati pomoću binomne formule

$$z^n = (a+bi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (bi)^k.$$

Primer: Izračunati $(2+i)^5$.

Međutim, kompleksne brojeve je mnogo lakše stepenovati kada su u eksponencijalnom ili trigonometrijskom obliku. Ako je $z = re^{\theta i}$, tj. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, na osnovu pravila za množenje dobija se da $\forall n \in \mathbb{N}$ važi

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \tag{5}$$

Za $n = 0$ formula (5) takođe trivijalno važi. A važi i za negativne cele brojeve jer koristeći (4) sa $\rho = 1$, imamo

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} &= \left(\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right)^n = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n \\ &= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta).\end{aligned}$$

Tako se dolazi do Moavrove formule

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.}$$

Dakle, $\forall k \in \mathbb{Z}$ važi

$$\boxed{\begin{aligned} z^k &= r^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) \\ z^k &= r^k e^{k\theta i}. \end{aligned}}$$

Primer: Izračunati $(1+i)^{2017}$.

Na osnovu prethodnih razmatranja sledi da se operacije sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i stepenovanja u skupu $\mathbb{R}$ mogu posmatrati kao restrikcije odgovarajućih operacija u skupu $\mathbb{C}$. Sa korenovanjem to nije slučaj iako koristimo istu oznaku $\sqrt[n]{\ }$ u oba skupa. U zadacima će ili biti eksplicitno naglašeno, ili će iz konteksta biti jasno da li $\sqrt[n]{\ }$ predstavlja korenovanje u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja omogućava da se na skupu $\mathbb{C}$ uvede operacija korenovanja. Neka je dat kompleksni broj $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Kompleksni broj w je $n-$ti koren kompleksnog broja z u oznaci

$$w = \sqrt[n]{z} \qquad \text{akko} \qquad w^n = z,$$

tj. $\sqrt[n]{z}$ je promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa rešenja jednačine $z = w^n$ po nepoznatoj w, za dati kompleksni broj z. Radi jednostavnosti, često kažemo da je $\sqrt[n]{z}$ skup rešenja jednačine $z = w^n$ po $w \in \mathbb{C}$.

Znači, ako je $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tada je

$$\rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Podsetimo se jednakosti kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku! Na osnovu toga sledi

$$w = \sqrt[n]{z} \iff \rho^n = r, \quad \text{tj.} \quad \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{i}$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Tako da za dato $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ imamo

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.}$$

Korenovanje u eksponencijalnom obliku:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n} i} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}\,.}$$

Prema tome, n-ti koren kompleksnog broja z ($z \neq 0$) ima n različitih vrednosti.

Umesto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, za vrednosti "brojača" k možemo uzeti bilo kojih n uzastopnih vrednosti, tj. $\{m, m+1, m+2, \ldots, m+n-1\}$. Zgodno je početno m birati tako da svaki od uglova $\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ padne u interval glavne vrednosti argumenta.

Sve vrednosti $\sqrt[n]{z}$ imaju isti moduo $\sqrt[n]{r}$, tj. sve pripadaju kružnici $K(0, \sqrt[n]{r})$. Takođe treba uočiti da za $k = j$ i $k = j+1$ dobijamo uglove (argumente) koji se razlikuju za $\dfrac{2\pi}{n}$, tj. ugao između svake dve susedne vrednosti $\sqrt[n]{z}$ je isti ugao: $\dfrac{2\pi}{n}$ (n-ti deo punog kruga).

Odatle zaključujemo da se svaka od vrednosti w_{k+1} promenljive $\sqrt[n]{z}$ može dobiti rotacijom vrednosti w_k oko koordinatnog početka za ugao $\dfrac{2\pi}{n}$, a w_k se može dobiti rotacijom vrednosti w_{k+1} oko koordinatnog početka za ugao $-\dfrac{2\pi}{n}$, tj.

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= w_k e^{\frac{2\pi}{n} i}, \\ w_k &= w_{k+1} e^{-\frac{2\pi}{n} i}, \end{aligned} \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Dakle, n vrednosti ($w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$) n-tog korena kompleksnog broja z, čine temena pravilnog n-tougla koji je upisan u kružnicu sa centrom u koordinatnom početku, poluprečnika $\sqrt[n]{r}$, pri čemu je $\arg(w_0) = \dfrac{\arg(z)}{n}$.

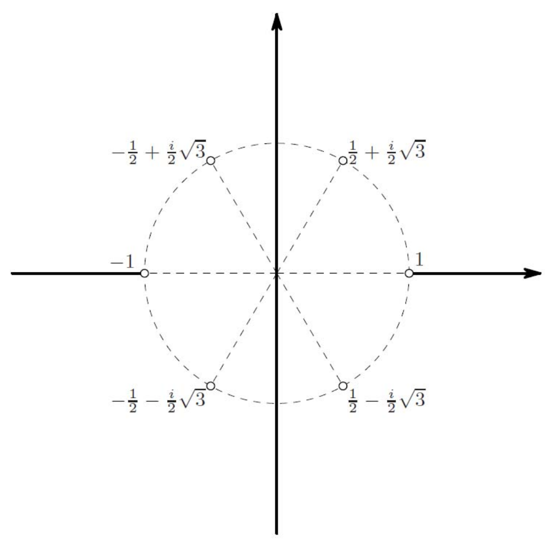
Primer: Naći sve vrednosti $\sqrt[6]{1}$ u skupu kompleksnih brojeva.

Rešenje: Kompleksni broj $z = 1$ u trigonometrijskom i eskponencijalnom obliku glasi: $z = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1 \cdot e^{0i}$. Vrednosti $w = \sqrt[6]{1}$ su date sa

$$w_k = e^{2k\pi i/6} = e^{k\pi i/3} = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}, \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

tj.

$$\begin{aligned} &w_0 = 1, \qquad &&w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad &&w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &w_3 = -1, \qquad &&w_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad &&w_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$



Slika 7: Sve vrednosti $\sqrt[6]{1}$

Primer: Naći sve vrednosti $\sqrt{3+4i}$.