## 2.3 Krivolinijski integrali

1. **Izračunati $I = \int\limits_L f(\vec{r})dr$, ako je $f(\vec{r}) = |\vec{r}|^2$, a $L$ je trougao sa temenima $A(1,0)$, $B(1,1)$ i $O(0,0)$.**

   *Rešenje:* Krivu $L$ možemo predstaviti kao uniju tri duži:
$$L = \overline{OA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BO}.$$
   Tada je:
$$I = \int\limits_L f(\vec{r})dr = \int\limits_{\overline{OA}} f(\vec{r})dr + \int\limits_{\overline{AB}} f(\vec{r})dr + \int\limits_{\overline{BO}} f(\vec{r})dr.$$
   Parametrizacije datih duži su
$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = 0, 0 \le t \le 1\},\\ \overline{AB} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y = t, 0 \le t \le 1\},\\ \overline{BO} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = t, 0 \le t \le 1\}.\end{aligned}$$
   Skalarna funkcija $f(\vec{r}) = |\vec{r}|^2$ u Dekartovim koordinatama ima oblik
$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$
   dok je
$$\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = |(\dot{x}(t), \dot{y}(t))| = \sqrt{\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$
   Integral date skalarne funkcije je tada:
$$\begin{aligned}I &= \int\limits_L f(\vec{r})dr = \int\limits_L f(\vec{r}(t))\left|\frac{\vec{r}(t)}{dt}\right| dt\\ &= \int\limits_0^1 t^2\sqrt{1+0}dt + \int\limits_0^1 (1+t^2)\sqrt{0+1}dt + \int\limits_0^1 2t^2\sqrt{1+1}dt\\ &= \left((2+2\sqrt{2})\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3}(5+2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

2. **Izračunati krivolinijski integral $I = \int\limits_L (x+y)dr$, gde je $L$ rub oblasti ograničene $y$-osom i delovima pravih $y = x+1$ i $y = 3-x$.**

   *Rešenje:* Krivu $L$ možemo predstaviti kao uniju duži:
$$L = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC},$$

gde je $A(0,1)$, $B(1,2)$ i $C(0,3)$. Tada je:

$$I = \int\limits_L (x+y)dr = \int\limits_{\overline{AB}} (x+y)dr + \int\limits_{\overline{BC}} (x+y)dr + \int\limits_{\overline{AC}} (x+y)dr.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = t+1, 0 \le t \le 1\}, \\
\overline{BC} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = 3-t, 0 \le t \le 1\}, \\
\overline{AC} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y = t, 1 \le t \le 3\},
\end{aligned}$$

vrednost datog integrala je

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^1 (t+t+1)\sqrt{1+1}dt + \int\limits_0^1 (t+3-t)\sqrt{1+1}dt + \int\limits_1^3 t\sqrt{1+0}dt \\
&= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4 = 5\sqrt{2} + 4.
\end{aligned}$$

3. **Izračunati $I = \int\limits_L f(\vec{r})dr$, gde je $f(\vec{r}) = x$, a $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x+1,\ y \le 1-x^2,\ y \ge 0\}$.**

   *Rešenje:* Slično kao u prethodnim zadacima, krivu $L$ možemo predstaviti kao uniju dve duži i dela parabole, $L = L_1 + L_2 + L_3$.

   Parametrizacija je sledeća:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = 0, -1 \le t \le 1\}, \\
L_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = 1-t^2, 0 \le t \le 1\}, \\
L_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = t+1, -1 \le t \le 0\}.
\end{aligned}$$

   Početni integral je:

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_L xdr = \int\limits_{L_1} xdr + \int\limits_{L_2} xdr + \int\limits_{L_3} xdr \\
&= \int\limits_{-1}^1 tdt + \int\limits_0^1 t\sqrt{1+4t^2}dt + \int\limits_{-1}^0 t\sqrt{2}dt \\
&= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

4. **Izračunati $I = \int\limits_L xydr$, gde je $L$ deo krive u preseku konusa $z = \sqrt{x^2+y^2}$ i ravni $z = 2$, između tačaka $A(2,0,2)$ i $B(-2,0,2)$.**

   *Rešenje:* Presek datog konusa i ravni je centralna kružnica poluprečnika $2:$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \wedge z = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \wedge z = 2.$$

Dakle, parametrizacija za $L$ je:

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 2, 0 \leq t \leq \pi\}.$$

U skladu sa tim, zadati integral po krivoj $L$ se svodi na

$$I = \int\limits_L xydr = 4\int\limits_0^\pi \cos t \sin t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt = 4\int\limits_0^\pi \sin(2t)dt = 0.$$

5. **Izračunati dužinu dela cikloide**

$$\boldsymbol{L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t),\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right\}.}$$

*Rešenje:* Dužina luka $L$ jednaka je integralu skalarne funkcije $f(\vec{r}) = 1$ po krivoj $L$ :

$$\Delta l = \int\limits_L dr.$$

Kako je $\dot{x}(t) = 2(1 - \cos t)$ i $\dot{y}(t) = 2\sin t$, dobijamo

$$\Delta l = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sqrt{4(1 - \cos t)^2 + 4\sin^2 t}dt = 2\sqrt{3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sqrt{1 - \cos t}dt$$

$$= 2\sqrt{3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}dt = 2\sqrt{6}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt$$

$$= 4\sqrt{6}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin udu = -4\sqrt{6} \cos u\Big|_{u=\frac{\pi}{4}}^{u=\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{3}.$$

Napomena: Pri rešavanju integrala koristili smo poznatu trigonometrijsku vezu za polovinu ugla $\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2}$, kao i činjenicu da je $\sin \frac{t}{2}$ pozitivan na intervalu integracije pa smo se lako oslobodili apsolutne vrednosti.

6. **Izračunati dužinu dela cilindrične zavojnice**

$$\boldsymbol{L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 4\pi\}.}$$

*Rešenje:*

$$\Delta l = \int\limits_L dr = \int\limits_0^{4\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4}dt = \sqrt{13}\int\limits_0^{4\pi} dt = 4\sqrt{13}\pi.$$

7. **Izračunati integral $I = \int\limits_{AB} (x^2y-2y)dr$, gde je $A(2,5)$ i $B(1,-1)$.**

*Rešenje:* Parametarske jednačine prave kroz tačke $A$ i $B$ su:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{6} = t.$$

Za tačku $A$ je $t = 1$, dok za tačku $B$ imamo da je $t = 0$. Dakle, parametrizacija date duži je

$$\overline{AB} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t+1, y = 6t-1, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Kako je, $\dot{x}(t) = 1$ i $\dot{y}(t) = 6$ traženi integral je:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\overline{AB}} (x^2y-2y)dr \\ &= \int\limits_0^1 (t^2+2t-1)(6t-1)\sqrt{1+36}dt \\ &= \sqrt{37}\int\limits_0^1 (6t^3+11t^2-8t+1)dt \\ &= \sqrt{37}\left(6\frac{t^4}{4}+11\frac{t^3}{3}-8\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{13\sqrt{37}}{6}. \end{aligned}$$

8. **Izračunati integral $I = \int\limits_{L} (x-y)dr$, duž polukružnice**

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 4,\ x \geq 0\right\}.$$

*Rešenje:* Kriva po kojoj integralimo je polukružnica sa centrom u $C(0,1)$ poluprečnika dva. Parametrizacija je:

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\cos t,\ y = 1 + 2\sin t,\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Kako je $\dot{x}(t) = -2\sin t$ i $\dot{y}(t) = 2\cos t$, vrednost traženog integrala je:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_L (x-y)dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t - 1 - 2\sin t)\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt \\ &= 2\,(2\sin t - t + 2\cos t)\big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = 8 - 2\pi. \end{aligned}$$

9. **Naći masu i centar mase žice**

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = e^t\cos t, y = e^t\sin t, z = e^t,\ 0 \leq t \leq 5\},$$

**ako je $\boldsymbol{\mu(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$ gustina žice u tački $\boldsymbol{(x,y,z) \in L}$.**

*Rešenje:* Kako je $\dot{x}(t) = e^t(\cos t - \sin t)$, $\dot{y}(t) = e^t(\cos t + \sin t)$ i $\dot{z}(t) = e^t$, masa je:

$$\begin{aligned} m &= \int\limits_L \mu(\vec{r})dr \\ &= \int\limits_0^5 \frac{1}{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + 1)} \sqrt{e^{2t}((\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1)}dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int\limits_0^5 e^{-t}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - e^{-5}). \end{aligned}$$

Koordinate centra mase $T(x_T, y_T, z_T)$ su

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{m} \int\limits_L x\mu(x,y,z)dr \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{e^5}{e^5-1} \int\limits_0^5 \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t} e^t \cos t dt = \frac{e^5}{e^5-1} \int\limits_0^5 \cos t dt = \frac{e^5}{e^5-1} \sin 5. \\ y_t &= \frac{1}{m} \int\limits_L y\mu(x,y,z)dr \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{e^5}{e^5-1} \int\limits_0^5 \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t} e^t \sin t dt \\ &= \frac{e^5}{e^5-1} \int\limits_0^5 \sin t dt = \frac{e^5}{e^5-1}(1 - \cos 5). \\ z_t &= \frac{1}{m} \int\limits_L z\mu(x,y,z)dr \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{e^5}{e^5-1} \int\limits_0^5 \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t} e^t dt = \frac{e^5}{e^5-1} \int\limits_0^5 dt = \frac{5e^5}{e^5-1}. \end{aligned}$$

10. **Izračunati integral vektorske funkcije $\boldsymbol{I = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}}$, ako je $\boldsymbol{\vec{F}(\vec{r}) = (x, 2y)}$, $\boldsymbol{A(2,-3)}$ i $\boldsymbol{B(4,2)}$.**

*Rešenje:* Da bismo uveli parametrizaciju tražimo jednačinu prave, $y = kx + n$, kojoj pripadaju tačke $A$ i $B$ :

$$-3 = 2k + n \ \land \ 2 = 4k + n \ \Leftrightarrow \ k = \frac{5}{2} \ \land \ n = -8.$$

Onda je parametrizacija vektora $\overrightarrow{AB}$ :

$$\overrightarrow{AB} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t,\ y = \frac{5}{2}t - 8,\ 2 \leq t \leq 4\right\},$$

odakle je dalje $dx = dt$ i $dy = \frac{5}{2}dt$. Početni integral vektorske funkcije sada postaje odredjeni integral po parametru $t$:

$$I = \int_L (x, 2y) \cdot (dx, dy) = \int_L xdx + 2ydy = \int_2^4 tdt + \int_2^4 2\left(\frac{5}{2}t - 8\right)\frac{5}{2}dt$$
$$= \int_2^4 \left(\frac{27}{2}t - 40\right) dt == \left(\frac{27}{4}t^2 - 40t\right)\Big|_{t=2}^{t=4} = 1.$$

11. **Izračunati $I = \int\limits_L (y, 0)d\vec{r}$, ako je elipsa**

$$\boldsymbol{L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1\right\}}$$

**negativno orijentisana.**

*Rešenje:* Iz parametrizacije elipse

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{5} = \cos t, \frac{y}{6} = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$$

sledi $dx = -5\sin tdt$ i $dy = 6\cos tdt$. Kako je smer integracije negativan (smer kretanja kazaljke na satu) dobijamo

$$I = \int_L (y, 0) \cdot (dx, dy) = \int_L ydx + 0dy = \int_{2\pi}^0 6\sin t(-5\sin t)dt$$
$$= -30\int_{2\pi}^0 \sin^2 tdt = -30\int_{2\pi}^0 \frac{1-\cos(2t)}{2}dt$$
$$= 15\int_0^{2\pi} dt - 15\int_0^{2\pi} \cos(2t)dt = 30\pi.$$

12. **Izračunati $I = \int\limits_L (y + 3, 2x - 1)d\vec{r}$, duž dela parabole $y = 1 - x^2$ u smeru kretanja od tačke $A(1, 0)$ do $B(0, 1)$.**

*Rešenje:* Parametrizacija date krive je

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2,\ x \in [0, 1]\}.$$

Za datu orijentaciju, integral je

$$
\begin{aligned}
I &= \int_L (y+3, 2x-1)\cdot(dx,dy) = \int_L (y+3)dx + (2x-1)dy \\
&= \int_1^0 \big((4-x^2)+(2x-1)(-2x)\big)\,dx = \int_1^0 \big(4-5x^2+2x\big)\,dx = -\frac{10}{3}.
\end{aligned}
$$

13. **Izračunati rad polja $\vec{F}(\vec{r}) = (xy, -3)$ duž dela kružnice**

$$L = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 2\}$$

**od tačke $A(1,1)$ do tačke $B(-1,1)$, u pozitivnom smeru.**

*Rešenje:* Kako je kriva po kojoj integralimo deo kružnice, parametrizacija je:

$$L = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t,\ t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\right\},$$

odakle je $dx = -\sqrt{2}\sin t dt, dy = \sqrt{2}\cos t dt$.

Rad datog vektorskog polja je

$$
\begin{aligned}
A &= \int_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_L xydx - 3dy \\
&= -2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 t\cos t dt - 3\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos t dt = 0.
\end{aligned}
$$

*Napomena*: Jedan od prethodnih integrala je tablični, a drugi se može rešiti smenom $u = \sin t$.

14. **Izračunati cirkulaciju polja $\vec{F}(\vec{r}) = (xy, x+y)$ po pozitivno orijentisanoj konturi $L$ koju obrazuju prave $y = 0, x = 1$ i kriva $y = x^2$.**

*Rešenje:* U ovom slučaju krivu $L$ predstavićemo kao uniju tri krive

$$L = L_1\cup L_2\cup L_3,$$

gde je

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=t, y=0, 0\le t\le 1\},\\
L_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=1, y=t, 0\le t\le 1\},\\
L_3 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=t, y=t^2, 0\le t\le 1\}.
\end{aligned}
$$

Za svaku od krivih pojedinačno uvodimo parametrizaciju i računamo integral:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{L_1} xydx + (x+y)dy = 0, \\ I_2 &= \int_{L_2} xydx + (x+y)dy = \int_0^1 (1+t)dt = \frac{3}{2}, \\ I_3 &= \int_{L_3} xydx + (x+y)dy = \int_1^0 (3t^3+2t^2)dt = -\frac{17}{12}. \end{aligned}$$

Sada je cirkulacija polja $\vec{F}$ jednaka:

$$C = \oint_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{L_1 \cup L_2 \cup L_3} xydx + (x+y)dy = \frac{1}{12}.$$

15. **Koristeći Green-ovu formulu izračunati**

$$\boldsymbol{I = \oint_L xydx + (x+y)dy,}$$

**po pozitivno orijentisanoj konturi $\boldsymbol{L}$ koju obrazuju prave $\boldsymbol{y = 0, x = 1}$ i kriva $\boldsymbol{y = x^2}$.**
*Rešenje:* Primetimo da je kontura $L$ rub oblasti $D$ :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}.$$

Prema formuli Grina, za $P = xy$ i $Q = x + y$, dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (Q_x - P_y)dxdy \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} (1-x)dy \right) dx = \int_0^1 (y - xy)\Big|_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

16. **Koristeći Green-ovu formulu izračunati**

$$\boldsymbol{I = \oint_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy}$$

**ako je $L$ pozitivno orijentisan rub trougla $\Delta ABC$ čija su temena $A(1,1), B(2,2)$ i $C(1,3)$.**

*Rešenje:* Trougao $\Delta ABC$ je geometrijsko mesto sledećeg skupa tačaka:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, x \le y \le 4-x\}.$$

Primetimo iz postavke zadatka da, za $P = 2(x^2+y^2)$ i $Q = (x+y)^2$, važi

$$P_y = 4y \quad \text{i} \quad Q_x = 2x+2y.$$

Primenjujući Green-ovu formulu dobijamo:

$$\begin{aligned} I &= \oint_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy = \iint_D (2x+2y-4y)dxdy \\ &= \int_1^2 \left( \int_x^{4-x} (2x-2y)dy \right) dx = 2\int_1^2 \left( xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=x}^{y=4-x} dx \\ &= 2\int_1^2 (-2x^2+8x-8)dx = 2\left( -2\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} - 8x \right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

17. **Koristeći Green-ovu formulu izračunati**

$$\boldsymbol{I = \oint_L -y^3dx + x^3dy}$$

**ako je $L$ pozitivno orijentisan rub oblasti**

$$\boldsymbol{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, \ \ 0 \le y \le \sqrt{3}x\}.}$$

*Rešenje:* Za $P = -y^3$ i $Q = x^3$ sledi

$$P_y = -3y^2 \quad \text{i} \quad Q_x = 3x^2.$$

Primenjujući formulu Green-a dobijamo:

$$I = \iint_D (3x^2+3y^2)dxdy.$$

Kako je oblast $D$ isečak kruga poluprečnika 2, uvešćemo smenu

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned} \qquad \rho \in [0,2], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Sada se integral $I$ svodi na:

$$I \ = \ 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_0^2 \rho^2 \rho d\rho \right) d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 3 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2} = 4\pi.$$

18. **Izračunati $I = \int\limits_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$, ako je $\vec{F}(\vec{r}) = (y, z, x)$ putanja**

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4,\ x + y + z = 4\}$$

**pozitivno orijentisana posmatrano sa pozitivnog dela $z$-ose.**

*Rešenje:* Parametrizacija date krive je

$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 4-2\cos t-2\sin t, t \in [0, 2\pi]\}$.

Odatle je

$$\begin{aligned} dx(t) &= \dot{x}(t)dt = (4 - 2\cos t - 2\sin t)dt \\ dy(t) &= \dot{y}(t)dt = (2\cos t)dt \\ dz(t) &= \dot{z}(t)dt = (2\sin t - 2\cos t)dt \end{aligned}$$

Zadati integral vektorske funkcije je sada

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_L \vec{F}(\vec{r}(t))d\vec{r}(t) = \int\limits_L (y(t), z(t), x(t)) \cdot (dx(t), dy(t), dz(t)) \\ &= \int\limits_0^{2\pi} (2\sin t(-2\sin t) + (4 - 2\cos t - 2\sin t)2\cos t \\ &\quad +2\cos t(2\sin t - 2\cos t))dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} (-4 - 4\cos^2 t)dt = -12\pi. \end{aligned}$$

Popraviti rešenje!

19. **Izračunati $I = \int\limits_L xydx + yzdy + xzdz$, gde je putanja**

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x - y + 2 = 0\}$$

**pozitivno orijentisana ako se posmatra sa pozitivnog dela $y$-ose.**

*Rešenje:* Primetimo da krivu $L$ možemo opisati na drugi način, koristeći ekvivalentan sisten jednačina:

$$\begin{aligned} L &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (x + 2)^2 + z^2 = 4,\ y = x + 2\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x + 1)^2 + z^2 = 2,\ y = x + 2\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1,\ y = x + 2\right\}. \end{aligned}$$

Jedna parametrizacija date krive je

$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 1 = \cos\varphi, \frac{z}{\sqrt{2}} = \sin\varphi, y = \cos\varphi + 1, \varphi \in [0, 2\pi]\}.$

Odatle je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} ((\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + 1)(-\sin\varphi) - (\cos\varphi + 1)\sqrt{2}\sin^2\varphi \\ &\quad +(\cos\varphi - 1)2\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Dovršiti ovaj zadatak.

20. **Odrediti potencijal $f = f(\vec{r})$ vektorskog polja $\vec{F}(\vec{r}) = (2xy, x^2, 1)$ a zatim izračunati**

$$I = \int_{(AB)} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r},$$

**gde je $A(1, -1, 2)$ i $B(2, 1, 3)$.**

*Rešenje:* Neka je

$$P = 2xy \qquad Q = x^2 \qquad R = 1.$$

Kako je

$$P_y = Q_x = 2x, \; P_z = R_x = 0, \; Q_z = R_y = 0$$

i funkcije $P, Q, R, P_y, P_z, Q_x, Q_z, R_x, R_y$ su neprekidne u $\mathbb{R}^3$ možemo zaključiti da postoji funkcija $f$ sa osobinom $\vec{F} = \nabla f$ tj. takva da je

$$f_x = 2xy \qquad f_y = x^2 \qquad f_z = 1. \tag{2.1}$$

Ako prvu jednačinu iz (2.1) integralimo po $x$, dobijamo

$$f = \int 2xydx + \varphi(y, z) = x^2y + \varphi(y, z).$$

Sada ćemo odrediti izvod dobijene funkcije $f$ po promenljivoj $y$:

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + \varphi(y, z)) = x^2 + (\varphi_y(y, z)),$$

i izjednačićemo ga sa drugom jednčinom iz (2.1), odakle zaključujemo da je $(\varphi(y, z))_y = 0$, što implicira da je $\varphi(y, z) = \psi(z)$. Sad je

$$f = x^2y + \psi(z). \tag{2.2}$$

Dalje određujemo izvod funkcije $f$ iz (2.2) po promenljivoj $z$:

$$f_z = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y) + \psi'(z) = \psi'(z).$$

Izjednačavanjem sa tre'om jednačinom iz (2.1) dobijamo

$$\psi'(z) = 1 \Rightarrow \psi(z) = \int dz = z + C.$$

Konačno funkcija $f$ je

$$f(x, y, z) = x^2 y + z + C.$$

Dok smo tražili funkciju $f$ pokazali smo i da je integral nezavisan od putanje integracije, što dalje implicira:

$$I = \int\limits_{(AB)} 2xydx + x^2dy + dz = \int\limits_{(AB)} df = f(B) - f(A) = 6.$$

21. **Izračunati**

$$\boldsymbol{I = \int\limits_{(AB)} \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}dy + \sqrt{x^2+y^2}dz,}$$

**gde je $\boldsymbol{A(0,1,2)}$ i $\boldsymbol{B(1,2,4)}$.**

*Rešenje:* Neka je

$$P = \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad Q = \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad R = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Kako je $P_y = Q_x$ i $P_z = R_x$ i $Q_z = R_y$, dati integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od izbora početne i krajnje tačke integracije.

Za krivu ćemo izabrati uniju tri vektora $\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{CD} \cup \overrightarrow{DB}$, gde je $A(0,1,2)$, $C(0,1,4)$, $D(0,2,4)$ i $B(1,2,4)$. Parametarske jednačine datih vektora su

$$\begin{aligned}
\overline{AC} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 1, z = t, t \in [2,4]\},\\
\overline{CD} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = t, z = 4, t \in [1,2]\},\\
\overline{DB} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = 2, z = 4, t \in [0,1]\}.
\end{aligned}$$

Za datu parametrizaciju je

$$I = \int\limits_2^4 dt + \int\limits_1^2 4dt + \int\limits_0^1 \frac{2t}{\sqrt{t^2+4}}dt = 6 + 2\sqrt{5}.$$

Proveriti i korigovati rešenje!