Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti

Kako biste odgovorili na sledeća pitanja?

1) Prosečan broj bodova na ispitu je bio 73,25. Ako je ispit polagalo 57 studenata, da li barem jedan od njih mora da ima baš 73,25 bodova?

2) Ako nam je potreban 1h vožnje do Beograda koji je na udaljenosti od 80 km, da li smo se u nekom trenutku vozili baš brzinom od 80km/h?

Odgovori koje dajemo intuitivno :

1) NE. Može se desiti da ni jedan student nema broj bodova koji je jednak prosečnom broju bodova…

2) DA. Morali smo u jednom trenutku ići brzinom od 80km/h negde između Novog Sada i Beograda…

U čemu je razlika između ova dva primera?

Razlika je što u primeru sa ispitom imamo konačan, <u>diskretan</u> skup podataka, dok

u drugom slučaju imamo <u>neprekidan</u> skup podataka.

(Intervali realnih brojeva imaju osobinu *neprekidnosti* (kompletnosti) koju naš mozak prepoznaje i daje tačan odgovor na ova dva pitanja.)

Osnovni rezultat do kog smo pokušali intuitivno da dođemo je Teorema o srednjoj vrednosti.

Teorema. Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

1 neprekidna funkcija na $[a,b]$ i

2 <u>diferencijabilna</u> na (a,b) .

Tada postoji $c\in(a,b)$ tako da važi

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ova teorema kaže da je tangenta u $(c,f(c))$ paralelna sa sečicom koja spaja $(a,f(a))$ i $(b,f(b))$

Da li su ova dva uslova zaista neophodna da bi se mogao garantovati rezultat Teoreme o srednjoj vrednosti?

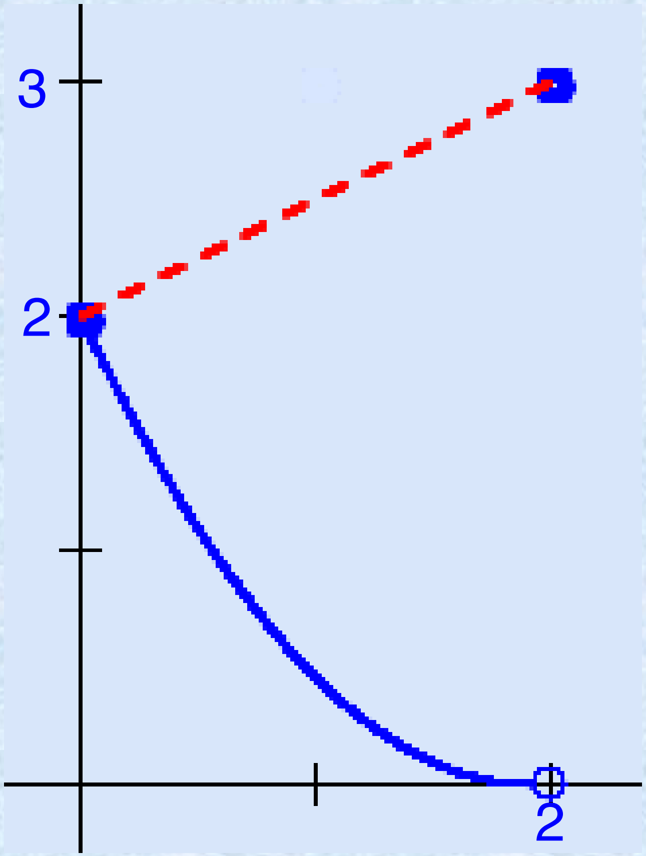
Odgovor je DA!

Neka nije ispunjeno 1 (a 2 jeste). Od ranije imamo da iz 2 sledi neprekidnost na (a,b), tako da neprekidnost može biti narušena samo na krajevima intervala $a,\ b$ (jednom ili oba).

Posmatramo funkciju:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x-2)^2 & x\in[0,2)\\ 3 & x=2\end{cases}$$

njen grafik je

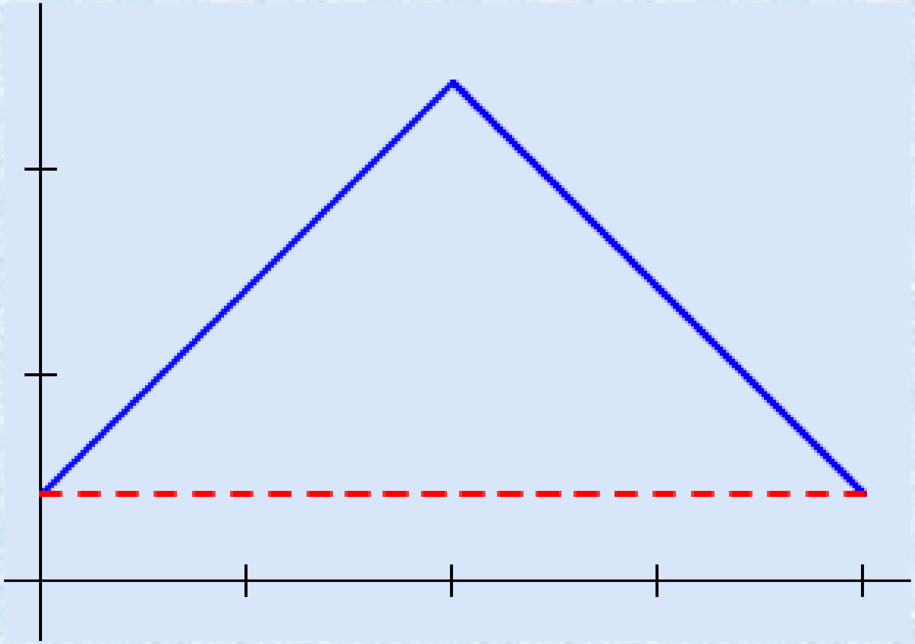


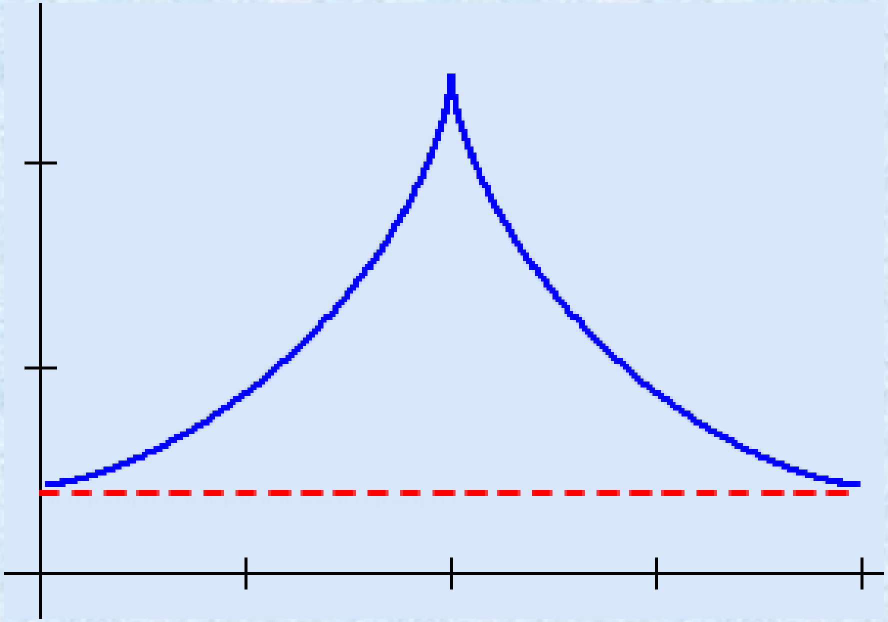
Nagib sečice je $\frac{1}{2}$, a sve tangente imaj nagib ≤ 0!

Tako da je uslov broj 1 apsolutno neophodan.

Da bismo videli da je i uslov broj 2 potreban, pogledajmo sledeća dva grafika:

Sečica ima nagib 0, a sve tangente (tamo gde postoje) imaju nagibe koji nisu jednaki nuli.





Iako se dokaz ove teoreme bazira na dokazivanju prvo posebnog slučaja kada je ta **sečica horizontalna** , ovaj rezultat, poznat kao **Rolova** teorema, se može posmatrati i kao posledica Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti.

Dakle, pod uslovima 1 i 2, ako je sečica koja prolazi kroz a i b horizontalna tj. f(a)=f(b), onda postoji neko $c \in (a,b)$ za koje važi

$$f'(c) = \mathbf{0}\ .$$

Tako zapravo Teorema o srednjoj vrednosti garantuje da se prosečna brzina u neprekidnom slučaju

DOSTIŽE U NEKOM TRENUTKU!

Kao i dosta drugih rezlutata, ovo je teorema o egzistenciji i ne govori ništa o tome kako da se pronađe tačka $c \in (a, b)$ i da li možda postoji više takvih tačaka!

Primer:

Naći sve vrednosti c koje ispunjavaju Teoremu o srednjoj vrednosti za funkciju

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \qquad x \in [-2, 2]$$

Rešenje. Ova funkcija je neprekidna i diferencijabilna na datom intervalu, tako da se TSV može primeniti. Imamo

$$f(-2) = -15; \quad f(2) = 5$$

Odavde dobijamo da je nagib sečice 5.

Jednačina $f'(x) = 5$ je data sa

$$3x^2 - 2x - 4 = 0$$

Rešenja date jednačine su:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3} = \begin{cases} -0.8685170918 \\ +1.535183758 \end{cases}$$

Tako da ova funkcija ima dve tangente koje su paralelne sečici koja spaja krajnje tačke intervala.