Neodređeni izrazi i Lopitalovo pravilo

NEODREĐENI IZRAZI

- Pretpostavimo da želimo da ispitamo osobine funkcije

$$F(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

- Iako F nije definisana za $x = 1$, moguće je ispitati kako se F ponaša u blizini $x = 1$.

NEODREĐENI IZRAZI

- Dakle, treba odrediti graničnu vrednost

(1) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

NEODREĐENI IZRAZI

- Za računanje ove granične vrednosti ne možemo koristiti pravila koja smo do sada imali jer je sada granična vrednost i brojioca i imenioca 0.
  - Tako da iako limes izraza (1) postoji, njegova vrednost nije očigledna jer i brojilac i imenilac teže ka 0, a izraz $\frac{0}{0}$ nije definisan.

NEODREĐENI IZRAZI—izraz oblika 0/0

- U opštem slučaju, ako imamo limes oblika $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

  gde za obe funkcije važi $f(x) \to 0$ i $g(x) \to 0$ kada $x \to a$, onda ta granična vrednost takvog može ali ne mora da postoji.

- Takav izraz se zove *neodređeni izraz* oblika $\frac{0}{0}$.
  - Sa takvim izrazima smo se i ranije susretali.

NEODREĐENI IZRAZI

- Kod racionalnih funkcija (količnik polinoma sa polinomom), zajednički činilac se skrati:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

NEODREĐENI IZRAZI

- Za dokaz granične vrednosti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

se mogu upotrebiti argumenti dati u Skripti str. 12.

NEODREĐENI IZRAZI

- Međutim, granična vrednost (1) se ne može izračunati koristeći ove metode.
  - U ovom delu gradiva će biti predstavljen metod poznat pod nazivom Lopitalovo pravilo pomoću kojeg će biti moguće računanje graničnih vrednosti neodređenih izraza.

NEODREĐENI IZRAZI

- Još jedan primer granične vrednosti čiji rezultat nije očigledan je situacija u kojoj treba npr. odrediti horizontalnu asimptotu funkcije *F*, tj. treba izračunati:

(2)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x-1}$$

NEODREĐENI IZRAZI

- U ovom slučaju nije očigledno šta treba uraditi da bi se ovaj limes izračunao jer i brojilac i imenilac neograničeno rastu kada $x \to \infty$.

- Ovde imamo "borbu" između brojioca i imenioca.
  - Ako brojilac "pobedi", onda će limes biti jednak ∞.
  - Ako imenilac "pobedi", onda će odgovor biti 0.
  - Alternativa je da među njima postoji "kompromis"—tada rezultat može biti neki pozitivan realan broj.

NEODREĐENI IZRAZI—izraz oblika ∞/∞

- U opštem slučaju, ako imamo limes oblika $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

gde za obe funkcije važi $f(x) \to \infty$ (ili $-\infty$) i $g(x) \to \infty$ (ili $-\infty$), tada granična vrednost može ali ne mora postojati.

- Takav izraz se zove *neodređen izraz* oblika $\frac{\infty}{\infty}$.

NEODREĐENI IZRAZI

- Od ranije znamo da se ovaj tip limes može, za npr. racionalne funkcije izračunati deljenjem i imenioca i brojioca najvećim stepenom od *x* koji se pojavljuje u imeniocu.
  - Na primer,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

NEODREĐENI IZRAZI

- Primenom ovog postupka se, međutim, ne može rešiti limes (2).
  - Lopitalovo pravilo se može primeniti i na ovaj tip neodređenih izraza.

LOPITALOVA TEOREMA

- Pretpostavimo da su *f* i *g* diferencijabilne funkcije i da je $g'(x) \neq 0$ na otvorenom intervalu *I* koji sadrži *a* (osim eventualno u *a*).

Neka su $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ i $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

ili $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

  - Drugim rečima, imamo neodređene izraze oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

LOPITALOVA TEOREMA

- Tada,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ako granična vrednost na desnoj strani postoji (ili je ∞ ili - ∞).

NAPOMENA 1

- Lopitalovo pravilo kaže da je granična vrednost količnika dve funkcije jednak količniku njihovih izvoda—ako su svi navedeni uslovi ispunjeni.
  - Posebno je važno da se provere uslovi koji se odnose na limese funkcija f i g pre nego što se pravilo upotrebi.

NAPOMENA 2

- Pravilo važi i za jednostrane limese i za limese u beskonačnosti ili minus beskonačnosti.
  - To jest, '$x \to a$' se može zameniti sa bilo kojom od sledećih mogućnosti: $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

LOPITALOVO PRAVILO

Primer 1

- Naći $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

  - $\lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ i $\lim_{x\to 1} (x-1) = 0$
  - Primenom Lopitalovog pravila dobijamo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

NAPOMENA

- Ako se nakon primene Lopitalovog pravila dobije neodređeni izraz i ako su ispunjeni uslovi teoreme za tako dobijen izraz, onda se Lopitalovo pravilo može ponovo primeniti, odnosno, dozvoljena je njegova višestruka uzastopna primena.

LOPITALOVO PRAVILO

Primer 2

- Izračunati

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$$

  - Imamo da je $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$
  - Na osnovu Lopitalovog pravila sledi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}$$

LOPITALOVO PRAVILO

Primer 2

- Kako $e^x \to \infty$ i $2x \to \infty$ kada $x \to \infty$, granična vrednost poslednjeg izraza je ponovo neodređen izraz.

- Ponovnom primenom Lopitalovog pravila, dobija se:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$$

Primer 3

- Izračunati $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

  - Kako $\ln x \to \infty$ i $\sqrt[3]{x} \to \infty$ kada $x \to \infty$, posle primene Lopitalovog pravila, dobija se:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

  - Limes sa desne strane je sada neodređeni izraz oblika $\frac{0}{0}$.

LOPITALOVO PRAVILO

Primer 3

- Međutim, umesto da se drugi put primeni Lopitalovo pravilo, uprošćavanjem izraza se može doći do rešenja:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}}=0$$

LOPITALOVO PRAVILO

- Dakle, kada se izračunavaju granične vrednosti, treba razmotriti i upotrebu drugih metoda pre primene Lopitalovog pravila.

NEODREĐENI IZRAZI

- Ako $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ili -∞), ni onda nije jasno šta će biti vrednost $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, ako uopšte postoji.

NEODREĐENI IZRAZI

- Ponovo postoji “borba” između f i g.
  - Ako f ”pobedi”, rezultat će biti 0.
  - Ako g ”pobedi”, odgovor će biti ∞ (ili $-\infty$).
  - Postoji još mogućnost “kompromisa” kada rezultat može da bude realan broj različit od nule.

NEODREĐENI IZRAZI—izrazi oblika $0 \cdot \infty$

- Ova vrsta limesa je neodređen izraz oblika $0 \cdot \infty$.
  - Rešava se tako što se proizvod *fg* napiše u obliku količnika:

$$f \cdot g = \frac{f}{1/g} \quad \text{ili} \quad f \cdot g = \frac{g}{1/f}$$

  - Tada taj limes postaje neodređeni izraz oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$ i na njega se može primeniti Lopitalovo pravilo.

NEODREĐENI IZRAZI

Primer 5

- Izračunati $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$
  - Ovaj limes spada među neodređene izraze jer, kada $x \to 0^+$, prvi činilac x taži ka 0, a drugi činilac $\ln x$ teži ka $-\infty$.

Primer 5

- Kada napišemo $x = 1/(1/x)$, imamo $1/x \to \infty$ kada $x \to 0^+$.

- Dakle, primenom Lopitalovog pravila se dobija:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

NEODREĐENI IZRAZI

Napomena

- U rešavanju prethodnog zadatka, postojala je i druga mogućnost - da se izraz napiše u obliku količnika na sledeći način:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

  - Sada je ovo neodređeni izraz oblika 0/0.
  - Međutim, primenom Lopitalovog pravila, izraz bi se samo dalje komplikovao i taj postupak ne bi doveo do rešenja.

NEODREĐENI IZRAZI

Napomena

- Kada se neodređeni izraz oblika $0 \cdot \infty$ zapisuje u obliku količnika, treba unapred imati na umu izvode datih funkcija, jer je cilj dobiti jednostavniji limes posle primene Lopitalovog pravila.

NEODREĐENI IZRAZI—izrazi oblika ∞ - ∞

- Ako su $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, onda je limes

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$$

neodređeni izraz oblika ∞ - ∞.

NEODREĐENI IZRAZI

- Ponovo postoji “takmičenje” između f i g.
  - Da li će rezultat biti ∞ (f “pobeđuje”)?
  - Da li će biti - ∞ (g “pobeđuje”)?
  - Da li će se “naći” na nekom realnom broju?

NEODREĐENI IZRAZI

- Da bi se dobio rezultat u slučaju ove vrste neodređenog izraza, ponovo je potrebno zapisati dati izraz u obliku količnika (svođenjem na zajednički imenilac, racionalizacijom ili izdvajanjem zajedničkog činioca ispred zagrade) tako da se dobije neodređeni izraz oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Primer 7

- Izračunati $$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)$$
  - Prvo treba uočiti da $1/\cos x \to \infty$ i $\operatorname{tg} x \to \infty$ kada $x \to (\pi/2)^-$.
  - Dakle, ovaj limes je neodređeni izraz.

NEODREĐENI IZRAZI

Primer 7

- Ovde je prirodno dovesti ih na zajednički imenilac:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

- Lopitalovo pravilo se moglo ovde upotrebiti jer $1-\sin x\to 0$ i $\cos x\to 0$ kada $x\to(\pi/2)^-$.

NEODREĐENI IZRAZI

- Tri tipa neodređenih izraza proizilaze iz

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$$

- $1.\lim_{x\to a} f(x)=0$ i $\lim_{x\to a} g(x)=0$ tip 0^0
- $2.\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ i $\lim_{x\to a} g(x)=0$ tip ∞^0
- $3.\lim_{x\to a} f(x)=1$ i $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ tip 1^∞

NEODREĐENI IZRAZI

- Sva tri slučaja se rešavanju na jedan od sledeća dva načina.

  - Logaritmovanjem obe strane:

$$y = \left[f(x) \right]^{g(x)} \Rightarrow \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

  - Zapisivanjem funkcije u eksponencijalnom obliku:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

NEODREĐENI IZRAZI

- Podsetimo se da se oba ova metoda koriste i za diferenciranje ovakvih funkcija.

  - Svaki od ovih metoda transformiše stepen u proizvod $g(x) \ln f(x)$, čiji limes je neodređeni izraz oblika $0 \cdot \infty$.

NEODREĐENI IZRAZI

Primer 8

- Izračunati $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\operatorname{ctg} x}$
  - Prvo treba uočiti da, kada $x \to 0^+$, imamo $1 + \sin 4x \to 1$ i $\operatorname{ctg} x \to \infty$.
  - Dakle, izraz je neodređen.

Primer 8

- Označimo $y = (1 + \sin 4x)^{\operatorname{ctg} x}$

- Tada, $\ln y = \ln[(1 + \sin 4x)^{\operatorname{ctg} x}]$

$$= \operatorname{ctg} x \ln(1 + \sin 4x)$$

Primer 8

- Primenom Lopitalovog pravila se dobija:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 4$$

Primer 8

- Napomenimo da je do sada izračunat limes izraza ln y.
- A traži se limes od y.
  - Sada koristimo činjenicu da je $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\sin 4x)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0^+} y$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$