$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P_n(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$P_n(x) = 0 \qquad (P_n(x))' \sim f(x) \dots$$

$$\int P_n(x)\,dx$$

BROJNI NIZOVI

(*) DEFINICIJA NIZA, OSNOVNI POJMOVI, GRANIČNA VREDNOST NIZA

DEF PRESLIKAVANJE $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ SE NAZIVA BROJNI NIZ.

$$a(n) \rightsquigarrow a_n$$

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, a_n JE OPŠTI ČLAN NIZA

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ← ČLANOVI NIZA

PRIMER

a) $a_n = \frac{n^2+1}{n}$, $a_1 = \frac{1^2+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$, $a_2 = \frac{2^2+1}{2} = \frac{5}{2}, \dots$

b) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2}$, $a_1 = -\frac{1+1}{2} = -1$, $a_2 = +\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}, \dots$

c) $a_n = a_1 + (n-1)d$ ← ARITMETIČKI NIZ

a_1 i d SU DATE VELIČINE

$$a_{n+1} - a_n = \underbrace{\cancel{a_1} + nd}_{a_{n+1}} - \underbrace{\cancel{a_1} - (n-1)d}_{a_n} = \cancel{nd} - \cancel{nd} + d = d$$

RAZLIKA JE KONSTANTNA

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$ ← SUMA PRVIH n ČLANOVA NIZA

d) $b_n = b_1 q^{n-1}$, GDE SU b_1 I q DATI BROJEVI, NAZIVA SE GEOMETRIJSKI NIZ.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\cancel{b_1} \cdot q^n}{\cancel{b_1} \cdot q^{n-1}} = q^{\cancel{n} - \cancel{n} + 1} = q$$

KOLIČNIK JE KONSTANTAN

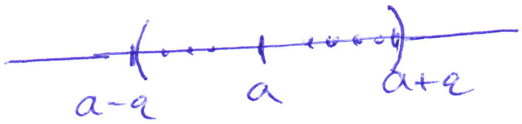
P2

- BROJNI NIZ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ JE OGRANIČEN, AKO POSTOJI REALAN BROJ $M>0$ TAKAV DA ZA SVAKO $n\in\mathbb{N}$ VAŽI
$$|a_n|\le M.$$

- BROJNI NIZ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ JE MONOTONO RASTUĆI (NEOPADAJUĆI), AKO ZA SVAKO $n\in\mathbb{N}$ VAŽI
$$a_n<a_{n+1} \quad (a_n\le a_{n+1})$$

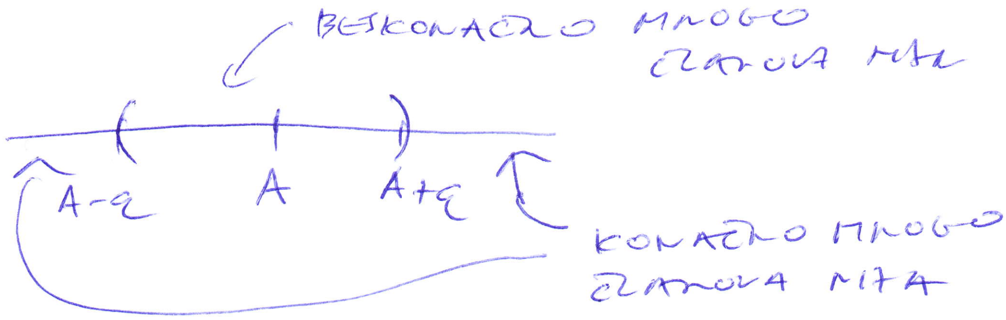
- BROJNI NIZ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ JE MONOTONO OPADAJUĆI (NERASTUĆI), AKO VAŽI:
$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>a_{n+1} \quad (a_n\ge a_{n+1}).$$

- ZA REALAN BROJ a, INTERVAL $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ PREDSTAVLJA ε-OKOLINU TAČKE a. ZA a KAŽEMO DA JE TAČKA NAGOMILAVANJA NIZA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, AKO SE U SVAKOJ ε-OKOLINI TAČKE a NALAZI BESKONAČNO MNOGO ČLANOVA NIZA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.



DEF: ZA REALAN BROJ A KAŽEMO DA JE GRANIČNA VREDNOST NIZA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, AKO ZA SVAKO $\varepsilon>0$ POSTOJI $n_0\in\mathbb{N}$, TAKO DA ZA SVAKO $n\ge n_0$ VAŽI
$$|a_n-A|<\varepsilon.$$

TADA PIŠEMO $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ I KAŽEMO DA NIZ KONVERGIRA KA BROJU A. AKO NIZ NIJE KONVERGENTAN, ONDA KAŽEMO DA JE DIVERGENTAN



$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

$+\infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ← DIVERGIRA U PLUS BESKONAČNO
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ← DIVERGIRA U MINUS BESKONAČNO

(T) SVAKI MONOTON I OGRANIČEN NIZ JE KONVERGENTAN.

(T) KONVERGENTAN NIZ IMA JEDINSTVENU GRANIČNU VREDNOST.

- G.V. = T.N. ALI T.N. ≠ G.V.

(*) OPERACIJE SA NIZOVIMA

- AKO SU $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ I $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, TADA VAŽI

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$

4) AKO ZA SVAKO $n > n_0$ $a_n \leq b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

5) AKO $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$ I $a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$

ČESTO KORISTIMO SLEDEĆE GRAN. VREDN.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n} = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{NE POSTOJI}, & q \le -1 \end{cases}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e \simeq 2{,}7\overline{1}$, "1^{∞}"

AKO JE $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{a}}{n!} = 0,\ a \in \mathbb{R}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

PRIMER ODREDITI SLEDEĆE GRANIČNE VREDNOSTI

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 3n + 5}{3n^3 + 5n^2 + 1} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^3 + 3n + 5}{n^3}}{\frac{3n^3 + 5n^2 + 1}{n^3}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4 + \cancel{\frac{3}{n^2}}^{\to 0} + \cancel{\frac{5}{n^3}}^{\to 0}}{3 + \cancel{\frac{5}{n}}^{\to 0} + \cancel{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}} = \frac{4}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - 5n + 4} - n\right) \overset{\text{"}\infty - \infty\text{"}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} (\underbrace{\sqrt{n^2 - 5n + 4}}_{A} - \underbrace{n}_{B}) \cdot$

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$\cdot \frac{\overbrace{\sqrt{n^2 - 5n + 4} + n}^{A+B}}{\underbrace{\sqrt{n^2 - 5n + 4} + n}_{A+B}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\cancel{n^2} - 5n + 4 - \cancel{n^2}}^{A^2 - B^2}}{n\left(\sqrt{1 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}} + 1\right)} \begin{matrix} /:n \\ /:n \end{matrix} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-5 + \cancel{\frac{4}{n}}^{\to 0}}{\sqrt{1 - \cancel{\frac{5}{n}}^{\to 0} + \cancel{\frac{4}{n^2}}^{\to 0}} + 1} = -\frac{5}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$

$n = 2k \to \lim\limits_{k\to\infty} (-1)^{2k} \cancel{\frac{2k+1}{2k}}^{\to 1} = 1$

$n = 2k+1 \to \lim\limits_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} \cancel{\frac{2k+2}{2k+1}}^{\to 1} = -1$

NIZ IMA DVE RAZLIČITE TAČKE NAGOMILAVANJA

$1 \neq -1$, ZNAČI DA JE DIVERGENTAN.

(PS)

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+7n+1}}{3n^3-2n-5} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n^3\left(3-\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n^{\cancel{3}}\left(3-\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n^2\left(3-\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)} = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}$$

$$= 0$$

e) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n \overset{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2}}\right)^{\frac{n^2}{2}\cdot n\cdot\frac{2}{n^2}} = e^{\lim_{n\to\infty} \cancel{n}\cdot\frac{2}{n^{\cancel{2}}}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}} = e^0 =$$

$\to e$

$$= 1$$