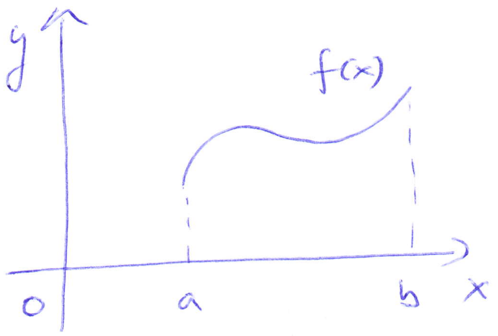
FUNKCIJE, GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ D – DOMEN FUNKCIJE

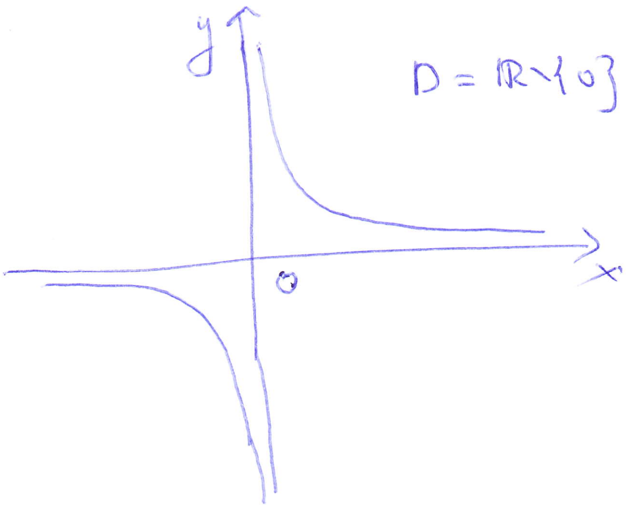


$y = f(x)$

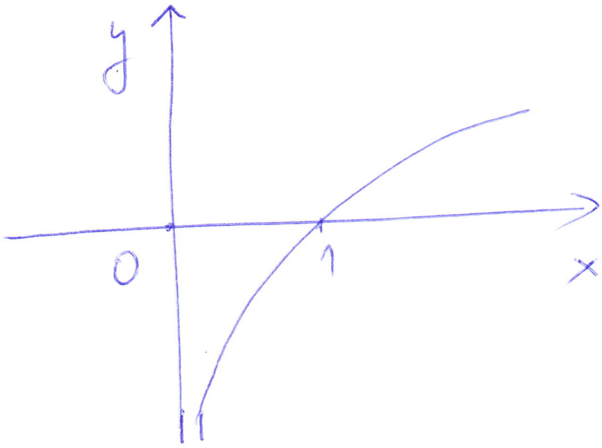
$D = [a, b]$

PRIMER   a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \ln x$

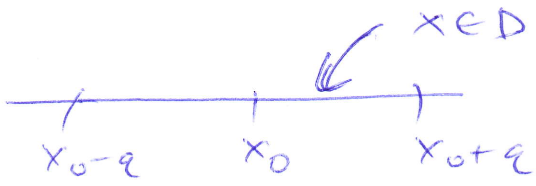
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$D = \mathbb{R}^+$



• TAČKA x_0 JE TAČKA NAGOMILAVANJA SKUPA $D \subseteq \mathbb{R}$, AKO ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ INTERVAL $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ SADRŽI BAR JEDAN ELEMENAT IZ SKUPA D, KOJI JE RAZLIČIT OD x_0.

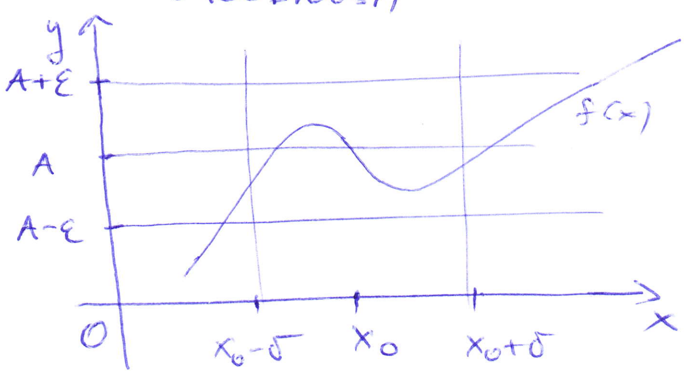


DEF. NEKA JE x_0 TAČKA NAGOMILAVANJA DOMENA D FUNKCIJE $f: D \to \mathbb{R}$. KAŽEMO DA JE BROJ A GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE f u TAČKI x_0 AKO ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI $\delta > 0$ (δ ZAVISI OD ε), TAKO DA ZA SVAKO $x \in D$ KOJE ZADOVOLJAVA USLOV $0 < |x - x_0| < \delta$ VAŽI DA JE $|f(x) - A| < \varepsilon$. TADA PIŠEMO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

I KAŽEMO DA G.U. POSTOJI („f TEŽI BROJU A KADA $x \to x_0$").

- GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DEFINICIJE GRANIČNE VREDNOSTI



$\varepsilon > 0$

$f(x_0)$ MOŽE, ALI NE MORA BITI ~~DEFINI~~ DEFINISANO.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad (x_0 \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty)$$

$x \to x_0$ $\quad x \neq x_0$

- DESNA GRANIČNA VREDNOST

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

$x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

x_0

- LEVA GRANIČNA VREDNOST

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

x_0

P3

① GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE $f(x)$ U TAČKI x_0 POSTOJI AKO I SAMO AKO LEVA I DESNA GRANIČNA VREDNOST POSTOJE I JEDNAKE SU, TJ.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

PRIMER $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = ?$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$$

POŠTO $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$, SLEDI DA $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ NE POSTOJI

- SLUČAJEVI G.V. KADA $x_0 \to \infty$ I $A \to \infty$

1) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ = A POSTOJI ILI = NE POSTOJI

2) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ = A POSTOJI ILI = NE POSTOJI

3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow$ KO „f TEŽI KA PLUS BESKONAČNOSTI"

4) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow$ „f TEŽI KA MINUS BESKONAČNOSTI"

T NEKA SU $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ I $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. (P4)

TADA VAŽE JEDNAKOSTI

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = A\cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$

- POZNATE (TABLIČNE) GRANIČNE VREDNOSTI

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha>0 \\ 1, & \alpha=0 \\ +\infty, & \alpha<0 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

PRIMERI ODREDITI SLEDEĆE GRANIČNE VREDNOSTI

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{5x^2-2x+1} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}{5-\underset{\to 0}{\frac{2}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{2}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2 = 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{2x} = 2\cdot 1 = 2$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$

$2x = t$

P5

DEF. AKO JE $x_0 \in D$ TAČKA NAGOMILAVANJA SKUPA D, ONDA JE $f: D \to \mathbb{R}$ NEPREKIDNA u x_0 AKO JE

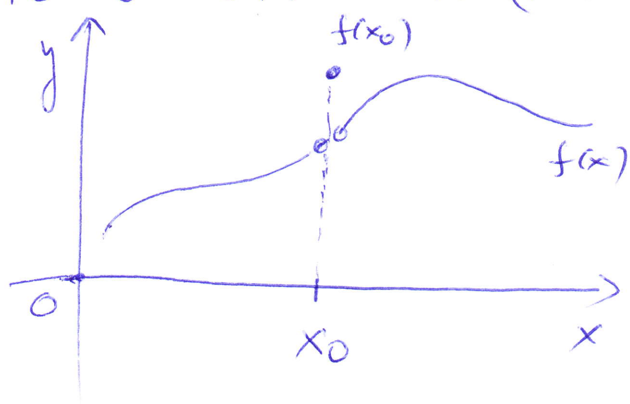
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

- AKO u $x_0 \in D$ FUNKCIJA $f: D \to \mathbb{R}$ NIJE NEPREKIDNA, ONDA ONA u TOJ TAČKI IMA PREKID.

RAZLIKUJEMO TRI VRSTE PREKIDA:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ POSTOJI, ALI $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

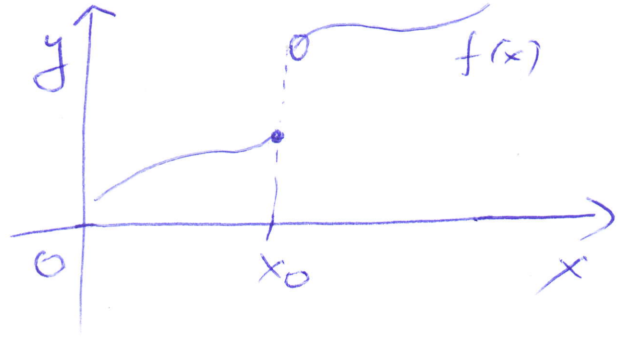
TO JE OTKLONJIV (PRIVIDAN) PREKID.



2. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ I $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = D$ POSTOJE,

ALI $L \neq D$

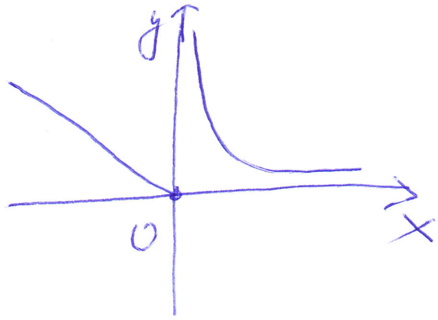
SKOK ILI PREKID PRVE VRSTE



3. BAR JEDNA OD GRANIČNIH VRIJEDNOSTI

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ILI $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ NE POSTOJI $\Rightarrow$ PREKID DRUGE VRSTE

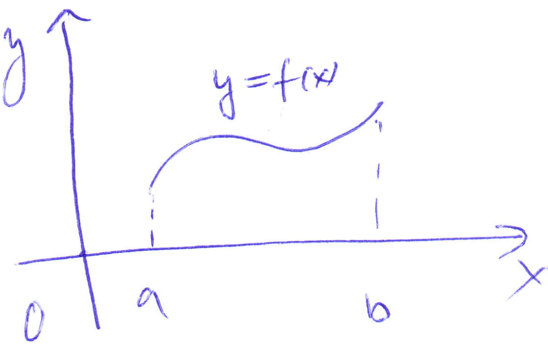
P6



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

IMA PREKID DRUGE VRSTE U TAČKI $x = 0$.

• FUNKCIJA JE NEPREKIDNA NA NEKOM INTERVALU, AKO JE NEPREKIDNA U SVAKOJ TAČKI TOG INTERVALA.



„FUNK. JE NEPREKIDNA NA INTERVALU, AKO SE MOŽE NACRTATI BEZ DIZANJA OLOVKE SA PAPIRA."

PRIMERI

⋮

PRIMER. ODREDITI SLEDEĆE G.V.

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}\ \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+3} = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4}$$

$x^2+x-2=0$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2}$$

$x_1 = 1,\ x_2 = -2$

$x^2+x-2 = (x-1)(x-(-2)) = (x-1)(x+2)$

~~x^2+3x~~ $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} = \text{NE POSTOJI}$$

$$D = \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} = +\infty \neq$$

$$L = \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} = -\infty$$