IZVOD FUNKCIJE

⊛ DEFINICIJA IZVODA I GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$

NEKA JE $x\in(a,b)$

- IZVOD FUNKCIJE f U TAČKI x SE DEFINIŠE KAO GRANIČNA VREDNOST

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

KAŽEMO DA IZVOD POSTOJI, AKO G.V. POSTOJI.

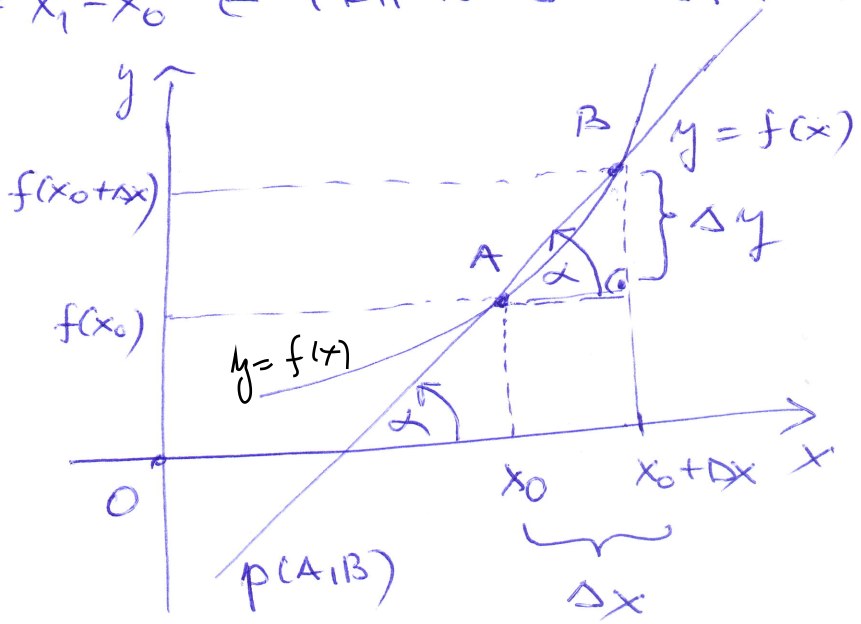
$f'(x)$ – PRVI IZVOD FUNKCIJE f U TAČKI x

- GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA IZVODA

POSMATRAMO IZVOD FUNK. f U TAČKI $x=x_0$

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ← PRIRAŠTAJ ZAVISNE PROM. y

$\Delta x=x_1-x_0$ ← PRIRAŠTAJ NEZAVISNE PROM. x



$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$p(A,B)$ – PRAVA AB

U GRANIČNOM SLUČAJU, KADA $\Delta x\to 0$, $B\to A$ I $p(A,B)$ POSTAJE TANGENTA FUNKCIJE f U TAČKI x_0

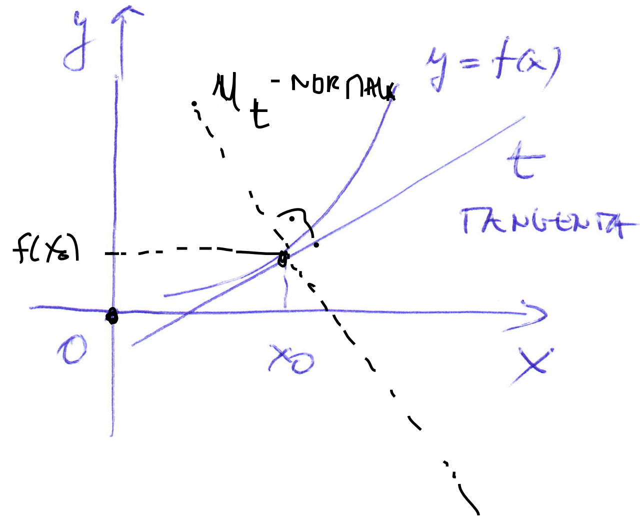
$$k_T=\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

(P2)

$k_T = f'(x_0)$, GDE JE k_T KOEFICIJENT PRAVCA TANGENTE NA KRIVU $y=f(x)$ U TAČKI x_0.

JEDNAČINA TANGENTE:

$t: \ y = k_T \cdot x + n_0$



$(x_0, f(x_0)) \in t \Rightarrow$

$\Downarrow$

$f(x_0) = k_T \cdot x_0 + n_0$

$n_0 = f(x_0) - k_T \cdot x_0$

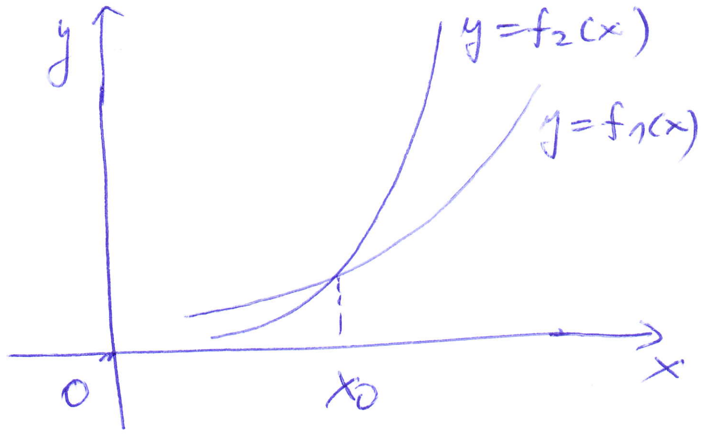
$\Downarrow$

$t: \ y = k_T \cdot x + f(x_0) - k_T \cdot x_0$

$$\boxed{y = k_T (x - x_0) + f(x_0)}$$

$k_T = f'(x_0)$

PRIMER



$f_1'(x_0) < f_2'(x_0)$

?

" PRVI IZVOD JE MERA PROMENE FUNKCIJE U TAČKI."

- TABLICA PRVIH IZVODA NEKIH FUNKCIJA (VIDETI KOMPLETNU TABLICU NA SAJTU)

1) $c' = 0$, $c \in \mathbb{R}$

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

3) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$

4) $(e^x)' = e^x$

5) $(\sin x)' = \cos x$

6) $(\cos x)' = -\sin x$ ...

⋮

* OSNOVNA PRAVILA DIFERENCIRANJA

P3

$$(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

- IZVOD SLOŽENE FUNKCIJE

$$h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$\boxed{h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

- DIFERENCIJAL FUNKCIJE

AKO POSTOJI PRVI IZVOD FUNKCIJE $y = f(x)$ U TAČKI x, ONDA JE DIFERENCIJAL FUNKCIJE $y = f(x)$ U TAČKI x, SE DEFINIŠE KAO

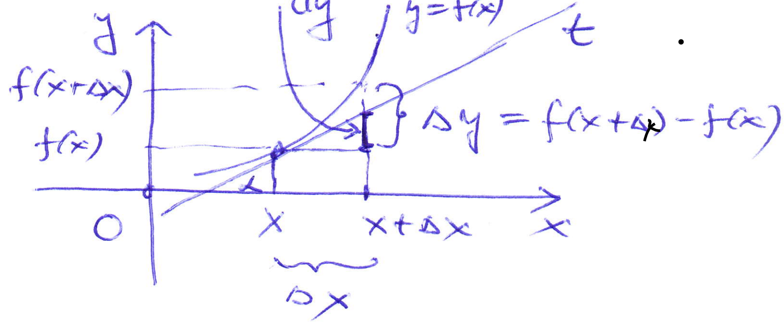
$$dy = f'(x) \cdot \Delta x, \quad dy(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

POŠTO JE $\Delta x = dx$, ONDA IMAMO

$$\boxed{dy = f'(x)\, dx} \quad \text{ILI} \quad df = f'(x) \cdot dx \rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} \rightarrow dy = tg\alpha \cdot dx$$

GEOM. INTERPRETACIJA



$$f'(x) = tg\alpha \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$\Delta x = dx$

$$dy \approx \Delta y$$

DIFERENCIJAL ↑   ↑ PRIRAŠTAJ

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}$$

df ← DIFERENCIJAL ZAVISNE PROM.

dx ← DIFERENCIJAL NEZAVISNE PROM.

- IZVOD PARAMETARSKI ZADATE FUNKCIJE

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$ t - PARAMETAR

PARAMETARSKI ZADATA FUNKCIJA

$y=f(x)$

EKSPLICITNO ZADATA FUNKCIJA

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t} \to \boxed{y'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}}$$

- IZVOD INVERZNE FUNKCIJE

$$y=y(x) \to y^{-1}=x(y)$$

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}\ ,\ (y^{-1})'=\frac{dx}{dy} \to (y^{-1})'=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'(x)}$$

$$(y^{-1}(y))'=\frac{1}{y'(x)} \quad \text{ILI} \quad \boxed{x'_y=\frac{1}{y'_x}}$$

- LEVI I DESNI IZVOD

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ ,\quad f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

↑ DESNI IZVOD U TAČKI x

↑ LEVI IZVOD U TAČKI x

• IZVODI VIŠEG REDA

P5

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)', \quad n \in \mathbb{N}$$

PRIMER AKO JE $s = s(t)$, t - VREME
s - PREĐENI PUT.

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$s'(t)$ JE TRENUTNA BRZINA u TAČKI t. (TRENUTKU)

$$s''(t) = \frac{ds'}{dt} = (s')' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s'(t+\Delta t) - s'(t)}{\Delta t}$$

$s''(t)$ JE PROMENA BRZINE u TRENUTKU t →
→ $s''(t)$ JE TRENUTNO UBRZANJE TELA

d) $f(x) = x^2 \sin x$; $f'(x) = (x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' =$
$= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$; e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\cos x}$, $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)' \cdot \cos x - (x^2+1)(\cos x)'}{\cos^2 x}$
$= \dfrac{2x \cdot \cos x - (x^2+1) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{2x \cos x + (x^2+1) \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

PRIMERI

IZRAČUNATI SLEDEĆE PRI IZVOD SLEDEĆIH FUNKCIJA

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 7$

$f'(x) = (3x^3 - 2x^2 + 5x - 7)' = (3x^3)' - (2x^2)' + (5x)' - (7)' =$
$= 3(x^3)' - 2(x^2)' + 5(x)' - (7)' = 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5 - 0 =$
$= 9x^2 - 4x + 5$; b) $f(x) = \sin x + 3x^7 + 1$

$f'(x) = \cos x + 3 \cdot 7 x^6 + 0 = \cos x + 21x^6$; c) $f(x) = 3\cos x + 2\ln x$

$f'(x) = -3\sin x + \frac{2}{x}$; d) f