PRIMER ODREDITI PRVI IZVOD SLEDEĆIH FUNKCIJA

a) $f(x) = \sin(2x+1)$, $f'(x) = \cos(2x+1)\cdot(2x+1)' =$

$= \cos(2x+1)\cdot 2 = 2\cos(2x+1)$

$g(x) = \sin x$

$\ell(x) = 2x+1$

$h(x) = g(\ell(x)) = g(2x+1) = \sin(2x+1)$

SLOŽENA FUNKCIJA

$\boxed{h'(x) = g'(\ell(x))\cdot \ell'(x)} = \frac{dg}{d\ell}\frac{d\ell}{dx}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \ln(x^2-3x+1)$, $f'(x) = \frac{1}{x^2-3x+1}\cdot(x^2-3x+1)' =$

$= \frac{1}{x^2-3x+1}\cdot(2x-3) = \frac{2x-3}{x^2-3x+1}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1}$, $f'(x) = \left((2x^2-3x+1)^{\frac{1}{2}}\right)' =$

$= \frac{1}{2}(2x^2-3x+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x^2-3x+1)' = \frac{1}{2}(2x^2-3x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4x-3) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4x-3}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = \sin x\cdot\cos(2x+1)$, $f'(x) = (\sin x)'\cdot\cos(2x+1) +$

$+\sin x\cdot(\cos(2x+1))' = \cos x\cdot\cos(2x+1) + \sin(x)\cdot(-\sin(2x+1)\cdot 2) =$

$= \cos x\cdot\cos(2x+1) - 2\sin x\cdot\sin(2x+1)$

e) $f(x) = \operatorname{arctg}(3x^2)$, $f'(x) = \frac{1}{1+(3x^2)^2}\cdot(3x^2)' =$

$= \frac{1}{1+9x^4}\cdot 6x = \frac{6x}{1+9x^4}$

PRIMENA IZVODA

LOPITALOVO PRAVILO

GRANIČNE VREDNOSTI NEODREĐENOG TIPA:

$„\frac{0}{0}"$, $„\frac{\infty}{\infty}"$, $„0\cdot\infty"$, $„\infty-\infty"$, $„1^{\infty}"$, $„0^{0}"$, $„\infty^{0}"$

T (LOPITALOVA TEOREMA)

AKO JE $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ILI $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

I POSTOJI (KONAČNA ILI BESKONAČNA) G.V. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, TADA POSTOJI $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, VAŽI

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

SAMO ZA OBLIKE $„\frac{0}{0}"$, $„\frac{\infty}{\infty}"$

GDE JE a BROJ ILI SIMBOL BESKONAČNOSTI.

PRIMER a) DOKAZATI DA JE $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{„\frac{0}{0}",\,L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

b) IZRAČUNATI G.V. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3} \overset{„\frac{\infty}{\infty}",\,L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = \frac{1}{3}\cdot \underbrace{„\frac{1}{\infty}"}_{\to 0} = \underline{\underline{0}}$$

⊛ ISPITIVANJE FUNKCIJA

- KOD ISPITIVANJA FUNKCIJA, POTREBNO JE ISPITATI SLEDEĆE:

$y = f(x)$

1) ODREDITI DOMEN DEFINISANOSTI, TJ.

$D_f, \quad f: D_f \to \mathbb{R}$

$D_f \subseteq \mathbb{R}$

PRIMER

a) $f(x) = \sqrt{x}$

$D_f = [0, +\infty)$

b) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

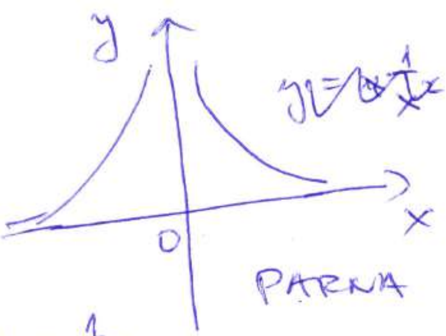
c) $f(x) = \ln(x^2)$

$D_f = \mathbb{R}$

2) ISPITATI SPECIJALNA SVOJSTVA

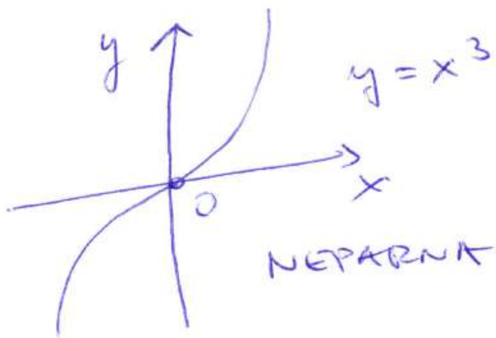
- PARNOST: AKO JE $f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ JE PARNA

AKO JE $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ JE NEPARNA



$y = \frac{1}{x^2}$

DOVOLJNO JE ISPITATI $y=f(x)$ SAMO ZA $x \geq 0$

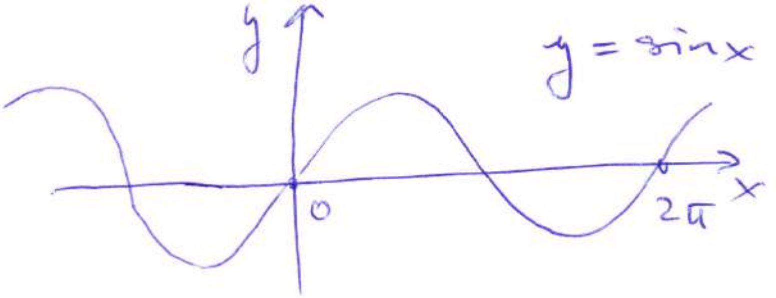


DOVOLJNO JE ISPITATI $y=f(x)$ SAMO ZA $x \geq 0$

3) - PERIODIČNOST

$f(x+T) = f(x)$, $T \in \mathbb{R}$, T JE PERIOD FUNKCIJE

$y = \sin x$, $T = 2\pi$



DOVOLJNO JE ISPITATI FUNKCIJU SAMO ZA

$x \in [0, T]$

3) ODREDITI NULE I ZNAK FUNKCIJE

PRVO ODREDIMO NULE: $f(x) = 0 \iff x = x_1, x = x_2 \ldots$

ZATIM ODREDIMO TAČKE „PREKIDA" FUNKCIJE, TAČKE U KOJIMA FUNK. EVENTUALNO MENJA ZNAK

FUNKCIJA MOŽE DA MENJA ZNAK I
U TAČKAMA PREKIDA ILI NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI.

ODREDIMO SVE MOGUĆE TAČKE U KOJIMA FUNKCIJA (EVENTUALNO) MENJA ZNAK: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

FORMIRAMO INTERVALE GDE FUNKCIJA NE MENJA ZNAK:

RECIMO: $(-\infty, x_1)$ (x_1, x_2) (x_2, x_3) ... $(x_n, +\infty)$

I FORMIRAMO TABELU

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	...	$(x_n, +\infty)$
$f(x)$	+	+	−		

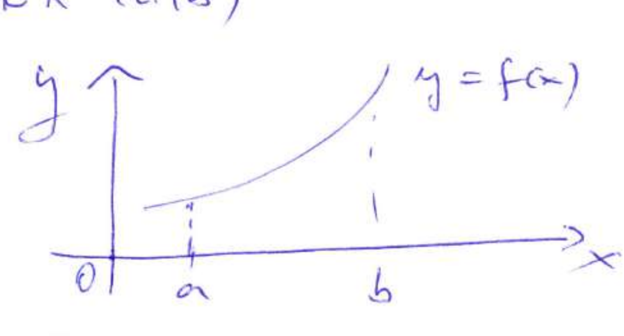
$f(x_1^*) > 0$, $x_1^* \in (-\infty, x_1)$

$f(x_3^*) < 0$, $x_3^* \in (x_2, x_3)$

4) ODREDIMO INTERVALE MONOTONOSTI I EKSTREMNE TAČKE

NEKA JE $(a,b) \subseteq D_f$ I $f'(x)$ POSTOJI ZA SVAKO $x \in (a,b)$

- AKO JE $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$) ZA SVAKO $x \in (a,b)$, TADA JE $f(x)$ MONOTONO RASTUĆA (NEOPADAJUĆA) NA (a,b)

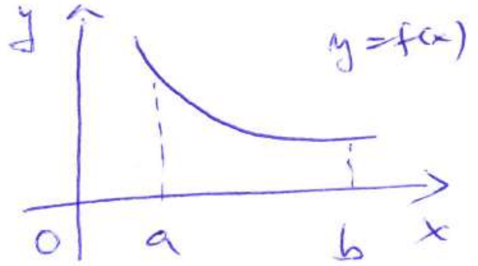


$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1, x_2 \in (a,b)$

– AKO JE $f'(x)<0$ ($f'(x)\le 0$) ZA SVAKO $x\in(a,b)$, P'3

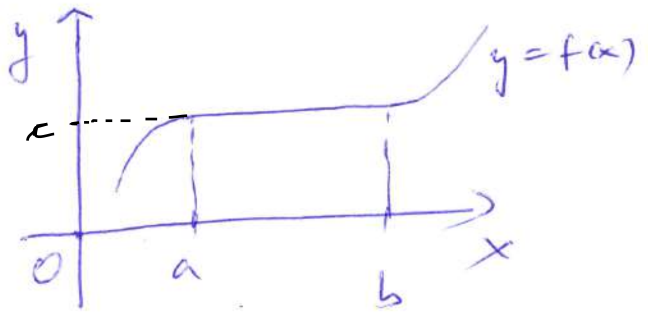
TADA JE $f(x)$ <u>MONOTONO OPADAJUĆA</u> (NERASTUĆA) NA (a,b)



$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

$x_1,x_2\in(a,b)$

– AKO JE $f'(x)=0$ ZA SVAKO $x\in(a,b)$ ONDA JE $f(x)$ <u>KONSTANTNA</u> NA (a,b)



$f(x)=c$

ZA SVAKO $x\in(a,b)$

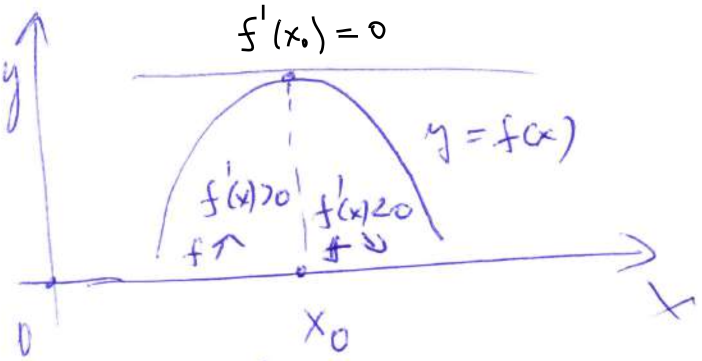
– EKSTREMNE TAČKE (<u>LOKALNI MINIMUM I LOKALNI MAKSIMUM</u>) MOŽEMO ODREDITI ISPITIVANJEM ZNAKA PRVOG IZVODA.

AKO $f'(x)$ MENJA ZNAK KADA x PROLAZI KROZ x_0, ONDA JE TO TAČKA U KOJOJ FUNKCIJA DOSTIŽE EKSTREMNU VREDNOST (MAKSIMUM ILI MINIMUM).

T AKO JE x_0 TAČKA EKSTREMA FUNKCIJE $f(x)$, TADA ILI $f'(x_0)$ NE POSTOJI ILI JE $f'(x_0)=0$.

TAČKE U KOJIMA $f'(x)$ NE POSTOJI ILI $f'(x)=0$ NAZIVAMO <u>KRITIČNIM TAČKAMA</u>.

KRITIČNE TAČKE SU MOGUĆE ~~EKS~~ TAČKE EKSTREMA.



$f'(x_0)=0$

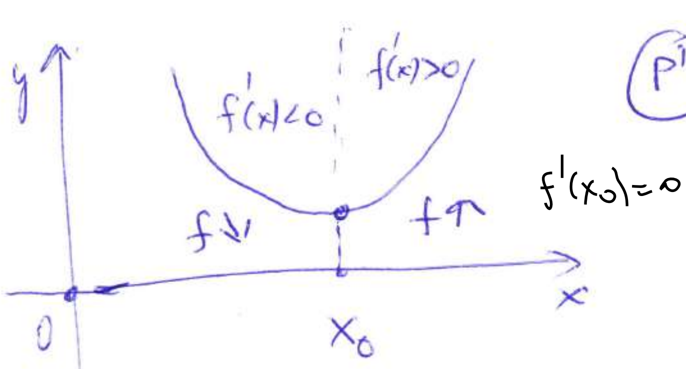
$x_{MAX}=x_0$

(x_0 je lok. maksimum)

Priraštaj funk. u $x=x_0$:

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$\Delta y<0$ za svako Δx



$f'(x_0)=0$

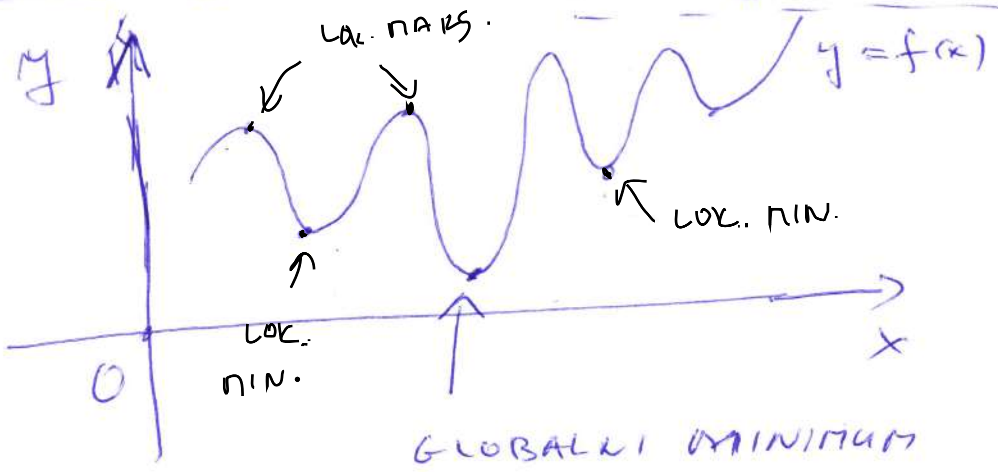
$x_{MIN}=x_0$

(x_0 je tačka lok. minimuma)

Priraštaj funkcije u $x=x_0$:

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

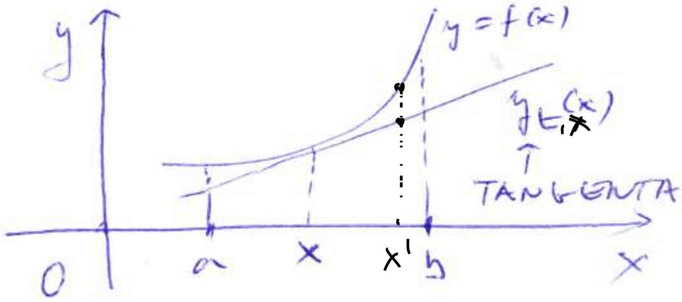
$\Delta y>0$ za svako Δx



5) ODREDITI KONVEKSNOST I PREVOJNE TAČKE

Neka $y=f(x)$ ima drugi izvod $f''(x)$ na int. (a,b).

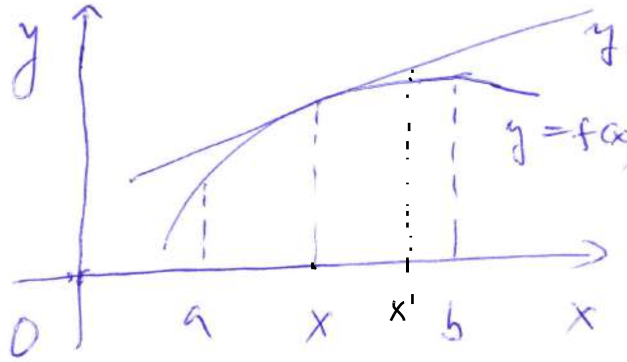
— Ako je $f''(x)\geq 0$ za svako $x\in(a,b)$, tada je $f(x)$ konkavna na (a,b).



DEF. KONKAVNOSTI ZA DIFERENCIJABILNU FUNK:

- Ako je $f(x')\geq y_{t,x}(x')$ za svako $x', x\in(a,b)$, tada je $f(x)$ konkavna na (a,b)

— AKO JE $f''(x) \le 0$ ZA SVAKO $x \in (a,b)$, TADA JE $f(x)$ <u>KONVEKSNA</u> NA (a,b)



$y_{t,x}$ ← TANGENTA NA KRIVU U TAČKI X

• $f(x)$ JE KONVEKSNA NA INT. (a,b) AKO JE

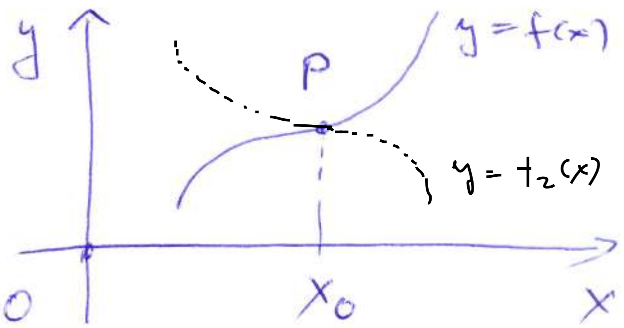
$$f(x') \le y_{t,x}(x'),$$

ZA SVAKO $x', x \in (a,b)$.

— NEKA JE U OKOLINA TAČKE x_0 ($U = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$).

TAČKA x_0 JE <u>PREVOJNA TAČKA</u> FUNKCIJE $y=f(x)$, AKO JE f KONVEKSNA (KONKAVNA) NA SKUPU $\{x \in U \mid x > x_0\}$ I KONKAVNA (KONVEKSNA) NA SKUPU $\{x \in U \mid x < x_0\}$.

AKO $f''(x)$ MENJA ZNAK PRI PROLAZU ARGUMENTA KROZ TAČKU x_0, ONDA JE x_0 PREVOJNA TAČKA FUNKCIJE.



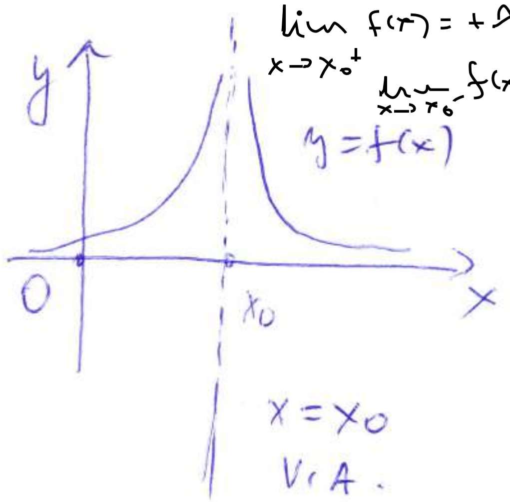
$P(x_0, f(x_0))$ JE PREVOJNA TAČKA GRAFIKA FUNKCIJE

6) ODREDITI ASIMPTOTE

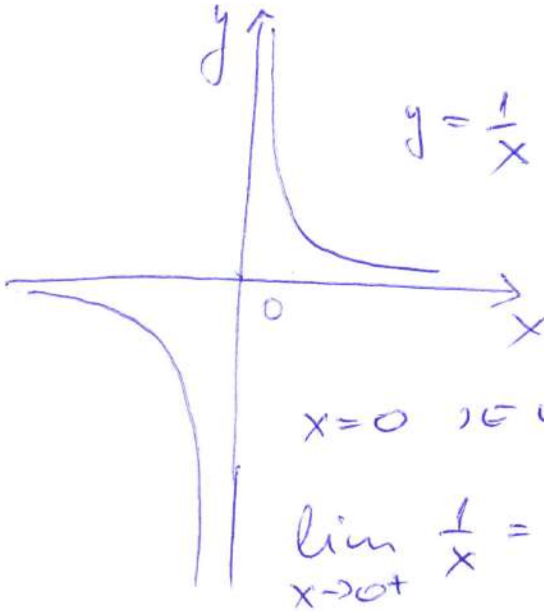
— PRAVA $\boxed{x = x_0}$ JE <u>VERTIKALNA ASIMPTOTA</u>, AKO JE $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ILI $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$



$x = x_0$
V.A.



$y = \frac{1}{x}$

$x = 0$ JE V.A.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

– PRAVA $\boxed{y = k \cdot x + n}$ JE KOSA ASIMPTOTA,
AKO POSTOJE $k \in \mathbb{R}$ I $n \in \mathbb{R}$ TAKVI DA JE

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad n = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k \cdot x\right)$$

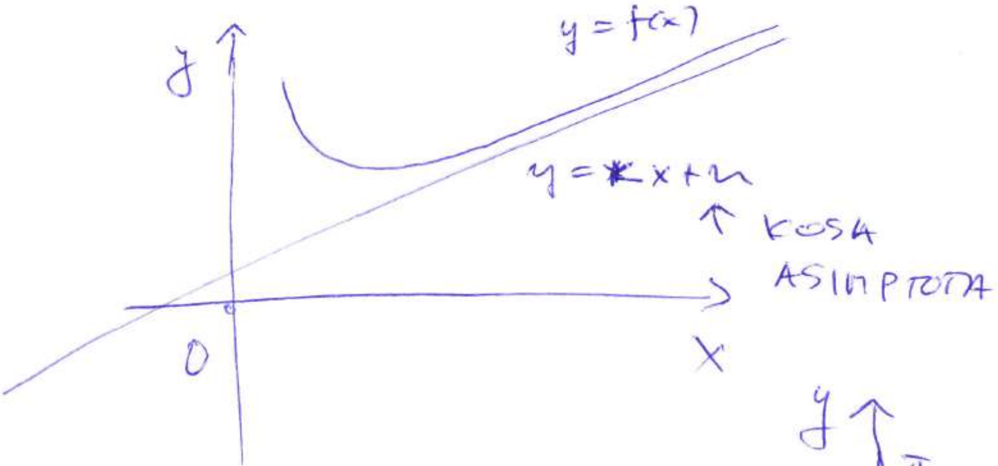
ILI

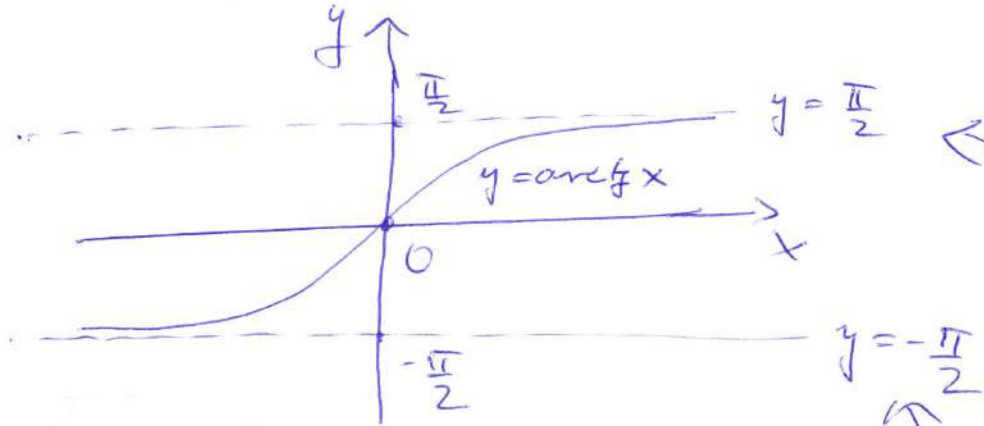
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad n = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k \cdot x\right)$$

– SPECIJALNO, AKO KOD KOSE ASIMPTOTE IMAMO DA JE $k = 0$, ONDA DOBIJAMO

$y = 0 \cdot x + n \Rightarrow \boxed{y = n}$ ŠTO PREDSTAVLJA

HORIZONTALNU ASIMPTOTU.





$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

HORIZ. ASIMPTOTE

7) CRTANJE GRAFIKA FUNKCIJE