DETERMINANTE

(*) KVADRATNA ŠEMA

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}, \quad \text{GDE SU } a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad n \in \mathbb{N}$$

NAZIVA SE DETERMINANTA.

a_{ij} SU ELEMENTI DETERMINANTE.

HORIZONTALNI REDOVI SE NAZIVAJU VRSTE.

VERTIKALNI REDOVI SE NAZIVAJU KOLONE.

ELEMENTI $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ČINE GLAVNU DIJAGONALU.

— II — $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots a_{n1}$ ČINE SPOREDNU DIJAGONALU.

n (BROJ VRSTA, ODNOSNO KOLONA) JE RED DETERMINANTE

VREDNOST DETERMINANTE JE BROJ.

(*) NAČIN IZRAČUNAVANJA DETERMINANTE.

$\boxed{n=2}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \overset{\text{def.}}{=\!=} a_1 b_2 - b_1 a_2$$

PRIMERI

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$$

b) $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \sin\alpha = \cos(\alpha+\beta)$$

(ADICIONA TRIG. FORMULA).

P2

$\boxed{n=3}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \overset{(-1)^{1+1}}{a_{11}} \underbrace{\begin{vmatrix} b_{22} & c_{23} \\ b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}}_{\text{MINOR, } M_{11} \text{ EL. } a_{11}} \overset{(-1)^{1+2}}{-} b_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & c_{23} \\ a_{31} & c_{33} \end{vmatrix}}_{\text{MINOR, } M_{12} \text{ EL } b_{12}} \overset{(-1)^{1+3}}{+} c_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & b_{22} \\ a_{31} & b_{32} \end{vmatrix}}_{\text{MINOR EL, } M_{13}\ c_{13}}$$

RAZVOJ DET. PO EL. PRVE VRSTE

$$= a_{11}b_{22}c_{33} + b_{12}c_{23}a_{31} + c_{13}a_{21}b_{32} - c_{13}b_{22}a_{31} - a_{11}c_{23}b_{32} - b_{12}a_{31}c_{33} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = -b_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & c_{23} \\ a_{31} & c_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + b_{22} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & c_{13} \\ a_{31} & c_{33} \end{vmatrix}}_{M_{22}} - b_{32} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & c_{13} \\ a_{21} & c_{23} \end{vmatrix}}_{M_{32}}$$

RAZVOJ DET.
PO EL. DRUGE KOLONE

$\boxed{\text{ZA PROIZVOLJNO } n \ (n \geq 2)}$

M_{ij} JE <u>MINOR</u> EL. a_{ij} i ~~DOBIJA SE~~ JE DETERMINANTA KOJA SE DOBIJA IZOSTAVLJANJEM i-TE VRSTE I j-TE KOLONE OD POLAZNE ~~MATRICE~~ DETERMINANTE.

A_{ij} JE <u>KOFAKTOR</u> EL. a_{ij} I DEFINIŠE SE NA SLEDEĆI NAČIN: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$,

DAKLE, KOFAKTOR JE „ZNAK PUTA MINOR".

DETERMINANTU REDA n $|a_{ij}|_{n\times n}$ MOŽEMO RAČUNATI NA SLEDEĆI NAČIN

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

RAZVOJ DET. PO ELEMENTIMA j-TE KOLONE

P3

SLIČNO,

$$D=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij}$$ ← RAZVOJ DET. PO EL. i-TE VRSTE

(*) OSOBINE DETERMINANATA

POSMATRAĆEMO DET. REDA DVA, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb = D.$

1) DET. SE NE MENJA AKO SE IZVRŠI MEĐUSOBNA ZAMENA VRSTA I KOLONA (OBRNE SE DET. OKO GLAVNE DIJAGONALE).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - c\cdot d \quad = \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

DAKLE, SVE OSOBINA KOJE VAŽE ZA VRSTE, VAŽE I ZA KOLONE I ~~OBRNUTO~~ OBRNUTO.

2) AKO DVE VRSTE (KOLONE) ZAMENE MESTA, DET. MENJA ZNAK.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -D$$

3) DET. SE MNOŽI BROJEM, TAKO ŠTO SE SVI ELEMENTI JEDNE VRSTE (KOLONE) MNOŽE TIM BROJEM.

$$\lambda\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda a d - \lambda b c = \lambda(ad - bc) = \lambda\cdot D$$

4) AKO SU SVI EL. JEDNE VRSTE (KOLONE) JEDNAKI NULI, DET. JE JEDNAKA NULI.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0d - 0\cdot c = 0$$

5) AKO SU ELEMENTI JEDNE VRSTE (KOLONE) PROPORCIONALNI (ILI JEDNAKI) ELEMENTIMA DRUGE VRSTE (KOLONE), DET. JE JEDNAKA NULI. $\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} = a\lambda b - \lambda a b = 0$

6) DET. NE MENJA VREDNOST AKO SE ELEMENTIMA JEDNE VRSTE (KOLONE) DODAM ODGOVARAJUĆI ELEMENTI DRUGE VRSTE (KOLONE) PRETHODNO POMNOŽENI NEKIM BROJEM.

$$\lambda \cdot \left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{matrix}\right| = ad + \cancel{\lambda ab} - bc - \cancel{\lambda ba} = ad - bc = D$$

<u>PRIMER.</u> IZRAČUNATI DETERMINANTU

$$D = \left|\begin{matrix} 1 & 21 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{matrix}\right| = 3 \cdot \left|\begin{matrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{matrix}\right| \cdot (2) = 3 \cdot \left|\begin{matrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 15 & 1 \end{matrix}\right|$$

$$= 3 \cdot \left(1 \cdot (-1)^{1+1} \left|\begin{matrix} 3 & 2 \\ 15 & 1 \end{matrix}\right| + 0 + 0 \right) = 3(3 - 30) = -81$$

„VOLIMO" DETERMINATE SA PUNO NULA.

$$\boxed{\text{MATRICE}}$$

(*) PRAVOUGAONA ŠEMA

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ GDE SU } m, n \in \mathbb{N},\ a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

NAZIVA SE <u>MATRICA</u> TIPA $m \times n$.

m – BROJ VRSTA, n – BROJ KOLONA, a_{ij} EL. MATRICE

AKO JE $m = n$, MATRICA JE KVADRATNA REDA n.

(*) DVE MATRICE $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ I $B=[b_{ij}]_{k\times p}$ (P5)

SU JEDNAKE AKO I SAMO AKO JE

$m=k$, $n=p$ I $a_{ij}=b_{ij}$ ZA SVAKO i I j.

(*) OPERACIJE SA MATRICAMA

- SABIRANJE

AKO SU A I B ISTOG TIPA, MOGUĆE JE IZVRŠITI SABIRANJE:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n},\quad B=[b_{ij}]_{m\times n}$$

$$A+B=\Big[c_{ij}\Big]_{m\times n}=\Big[a_{ij}+b_{ij}\Big]_{m\times n}$$

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

VAŽI $A+B=B+A$.

PRIMER $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 4\end{bmatrix}$.

- MNOŽENJE SKALAROM

$$\lambda\cdot A=\lambda\cdot[a_{ij}]_{m\times n}=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

$$2\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

- PROIZVOD MATRICA ~~AZ~~

$$A=[a_{ij}]_{m\times n},\quad B=[b_{ij}]_{n\times k}$$

$$=$$

MORA BITI: BROJ KOLONA A = BROJ VRSTA B. (P6)

$$A \cdot B = C, \quad C = [c_{ij}]_{m \times k}$$

m — BROJ VRSTA A; k — BROJ KOLONA B

$$c_{ij} \overset{df.}{=} a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

MNOŽENJE MATRICA (U OPŠTEM SLUČAJU) NIJE KOMUTATIVNO,
$A \cdot B \neq B \cdot A$.

PRIMER

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1+2\cdot 2 & 0-2 & 0+10 \\ 3+8 & 0-4 & 0+20 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & 10 \\ 11 & -4 & 20 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ILI $B = 0$

$AB = AC \not\Rightarrow B = C$

$(AB)C = A(BC)$ – ASOCIJATIVNOST

$A(B+C) = AB + AC$
$(A+B) \cdot C = AC + BC$ – DISTRIBUTIVNOST

DEF KVADRATNA MATRICA SA ELEMENTIMA

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = E_n$$ SE NAZIVA JEDINIČNA MATRICA.

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

DEF. TRANSPONOVANA MATRICA JE MATRICA KOJA NASTAJE ZAMENOM KOLONA I VRSTA POLAZNE MATRICA.

$A \to A^T$ – TRANSP. OD A

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

VAŽI: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = A^T \cdot B^T$

$(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$

DEF. NEKA JE A KVADRATNA MATRICA REDA n. AKO POSTOJI KVADRATNA MAT. X, TAKVA DA JE

$$X \cdot A = A \cdot X = E_n$$

ONDA KAŽEMO DA JE X INVERZNA MATRICA ZA MAT. A I PIŠEMO $A^{-1} = X$. $\Rightarrow$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$$

DEF. AKO KVAD. MAT. A IMA INVERZNU (POSTOJI A^{-1}) ONDA KAŽEMO DA JE ONA REGULARNA INAČE JE ONA SINGULARNA.

(T) KVAD. MAT. A JE REGULARNA (A^{-1} POSTOJI) $\iff \det(A) \neq 0$.

$\det(A) = 0 \iff$ A JE SINGULARNA.

(*) IZRAČUNAVANJE INVERZNE MATRICE

NEKA JE A KVAD. MATRICA REDA n I
NEKA JE $\det(A) \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}}_{\operatorname{adj}(A)} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

ADJUNGOVANA
MATRICA OD A

GDE SU A_{ij} — KOFAKTORI ~~ELE~~ $i = 1, \ldots, n$
$j = 1, \ldots, n$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- OSOBINE INV. OPERATORA

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

PS

PRIMER IZRAČ. A^{-1}, AKO JE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow \text{POSTOJI } A^{-1}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(+1) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(+1-1) = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-8} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$