SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

P1

(*) JEDNAČINA JE <u>LINEARNA</u> AKO SU SVE NEPOZNATE NAJVIŠE PRVOG STEPENA.

PRIMER

$$ax + by = c$$ — SLOBODAN ČLAN

KOEFICIJENTI NEPOZNATE

PREDSTAVLJA PRAVU U RAVNI, OTUDA NAZIV LINEARNA.

DEF. SISTEM OD m LINEARNIH JEDNAČINA SA n NEPOZNATIH JE SKUP JEDNAČINA

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

$(m \times n)$ TIP SISTEMA

GDE SU $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ <u>KOEFICIJENTI</u>,

$b_i \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ SU <u>SLOBODNI ČLANOVI</u>,

A $x_1, x_2, \dots, x_n$ SU <u>NEPOZNATE SISTEMA</u>.

- AKO JE $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, ONDA JE SISTEM <u>HOMOGEN</u>.

DEF. REŠENJE SISTEMA JE SVAKA UREĐENA n-TORKA $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ TAKVA DA JE SVAKA JEDNAČINA SISTEMA ZADOVOLJENA ZA $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \dots, x_n = x_n^*$.

PIŠEMO: $R_s = \{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)\}$ ← SKUP REŠENJA SISTEMA

PRIMER

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_2 &= 3 \end{aligned} \xrightarrow{\text{REŠENJE}} (\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{3}) \iff \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

b) $\underset{(2\times 3)}{\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+y&=0\end{aligned}} \iff \begin{aligned} -y+y+z&=1\\ x&=-y\end{aligned} \iff \begin{aligned} z&=1\\ x&=-y\\ y&\in\mathbb{R}\end{aligned}$

$R_S=\{(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{-y}},\underset{y}{\underset{\shortparallel}{y}},\underset{z}{\underset{\shortparallel}{1}})\mid y\in\mathbb{R}\}$ ← BESKONAČNO MNOGO REŠENJA!

c) $\underset{(2\times 3)}{\begin{aligned} x+y-z&=1\\ -x-y+z&=1\end{aligned}}\Big\}(+) \iff \begin{aligned} x+y-z&=1\\ 0&=2\ (\lightning)\end{aligned} \quad R_S=\emptyset$

⇝ SISTEM NEMA REŠENJA!

(*) PRIRODA SISTEMA u ZAVISNOSTI OD BROJA REŠENJA

1) <u>ODREĐEN</u> SISTEM – SISTEM IMA JEDNO REŠENJE

2) <u>NEODREĐEN</u> SISTEM – SISTEM IMA VIŠE OD JEDNOG REŠENJA (∞ MNOGO REŠENJA)

3) <u>NEMOGUĆ</u> (KONTRADIKTORAN) SISTEM – SISTEM NEMA REŠENJA.

AKO JE 1) ILI 2), KAŽEMO DA je SISTEM <u>SAGLASAN</u>.

- REŠENJE $(0,0,\dots,0)$ NAZIVAMO TRIVIJALNO REŠENJE.

(+) HOMOGEN SISTEM $(b_1=b_2=\dots=b_m=0)$ UVEK IMA BAR JEDNO REŠENJE (TRIVIJALNO).

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2\cdots+a_{1n}x_n&=0\\ &\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=0\end{aligned} \longrightarrow (x_1,x_2,\dots,x_n)=(0,0,\dots,0)$$

P3

DEF. SISTEMI ČIJI ~~SE~~ SKUPOVI REŠENJA POKLAPAJU (ISTI SU), NAZIVAJU ~~SE~~ SE ~~EKVIVALENTNI SISTEMI~~ EKVIVALENTNI SISTEMI.

- EKVIVALENTNI SISTEMI SE DOBIJAJU ELEMENTARNIM TRANSFORMACIJAMA:
  1) ZAMENA MESTA DVEJU JEDNAČINA.
  2) MNOŽENJE NEKE JEDNAČINE BROJEM RAZLIČITIM OD NULE.
  3) DODAVANJE NEKE JEDNAČINE POMNOŽENE BROJEM, NEKOJ DRUGOJ JEDNAČINI.

(1) NAČIN REŠAVANJA ~~ETA~~. SISTEMA LIN. JEDNAČINA

- GAUSOV POSTUPA ELIMINACIJE KORISTI ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE U CILJU TRANSFORMACIJE SISTEMA NA „TROUGAONI" OBLIK

PRIMER

a)
$$\begin{array}{l} x+2y=3 \quad \cdot(-1),\ \cdot(-2) \\ x-y=0 \quad + \\ 2x+y=3 \quad + \end{array} \iff \begin{array}{l} x+2y=3 \\ -3y=-3 \\ -3y=-3 \end{array} \iff \begin{array}{l} x+2y=3 \\ -3y=-3 \end{array}$$

(3×2)

$$\iff \begin{array}{l} x+2y=3 \\ y=1 \end{array} \iff \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array} \qquad R_S=\{(1,1)\}$$

SISTEM JE ODREĐEN

b)
$$\begin{array}{l} x+2y=3 \quad \cdot(-1),\ \cdot(-2) \\ x-y=0 \quad + \\ 2x+y=4 \quad + \end{array} \iff \begin{array}{l} x+2y=3 \\ -3y=-3 \quad \cdot(-1) \\ -3y=-2 \end{array} \iff \begin{array}{l} x+2y=3 \\ -3y=-3 \\ 0=1 \end{array}$$

$R_S=\emptyset$ KONTRADIKCIJA

- KRAMEROVE FORMULE

PRETPOSTAVIMO DA JE SISTEM KVADRATNOG TIPA, TJ. $n = m$.

POSMATRAJMO SLUČAJ KADA JE $n = 3$.

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DETERMINANTA} \\ \text{SISTEMA}}}{D_S} \overset{\text{df.}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x \overset{\text{df.}}{=} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y \overset{\text{df.}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & d1 & c_1 \\ a_2 & d2 & c_2 \\ a_3 & d3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z \overset{\text{df.}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d1 \\ a_2 & b_2 & d2 \\ a_3 & b_3 & d3 \end{vmatrix}.$$

TADA VAŽI:

$$x \cdot D_S = \begin{vmatrix} a_1 x & b_1 & c_1 \\ a_2 x & b_2 & c_2 \\ a_3 x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z & b_1 & c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & b_2 & c_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$+ \cdot (y)$ $+ \cdot (z)$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D_x \Rightarrow x D_S = D_x \Rightarrow \boxed{x = \frac{D_x}{D_S}}$$

$D_S \neq 0$

NA SLIČAN NAČIN DOBIJAMO:

$$\boxed{y = \frac{D_y}{D_S}}, \quad \boxed{z = \frac{D_z}{D_S}}$$

— KRAMEROVE FORMULE

VAŽE I ZA $n > 3$!

AKO JE $D_S \neq 0$ I POSTOJE DVA REŠENJA SIST. (x_1, y_1, z_1) I (x_2, y_2, z_2), TADA NA OSNOVU KRAMEROVIH PRAVILA IMAMO DA JE $x_1 D_S = D_x$ I
$x_2 D_S = D_x$.

ODUZIMANJEM OVIH JEDNAKOSTI DOBIJA SE

$$(x_1 - x_2) D_S = 0 \iff x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2 .$$

SLIČNO SE DOBIJA DA JE $y_1 = y_2$ I $z_1 = z_2$.

T KVADRATNI SISTEM LIN. JEDNAČINA JE ODREĐEN $\iff D_S \neq 0$.

- AKO JE $D_S = 0$ ISPITIVANJE SISTEMA SE VRŠI POMOĆU GAUSOVOG POSTUPKA (DA LI JE NEODREĐEN ILI KONTRADIKTORAN?)

T U KVADRATNOM I HOMOGENOM SISTEMU VAŽI:

1) $D_S \neq 0 \Rightarrow$ SISTEM JE ODREĐEN I REŠENJE JE TRIVIJALNO $(0, 0, \ldots, 0)$

2) $D_S = 0 \Rightarrow$ SISTEM JE NEODREĐEN (NE MOŽE BITI KONTRADIKTORAN JER IMA TRIVIJALNO REŠENJE)