POLINOMI

⊛ UVODNI POJMOVI

DEF. FUNKCIJA

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

GDE SU $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$,

NAZIVA SE POLINOM.

AKO SU $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ONDA JE $P_n(z)$ REALAN POLINOM (REALAN POLINOM IMA SAMO REALNE KOEFICIJENTE).

n – STEPEN POLINOMA

a_n – NAJSTARIJI (VODEĆI) KOEFICIJENT

a_0 – SLOBODAN ČLAN

AKO SU $a_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ $P(z) = 0$ NULA POLINOM ~~STEPEN~~

AKO JE $a_n = 1$ $\Rightarrow$ $P_n(z)$ JE NORMIRAN POLINOM

- DVA POLINOMA $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ I

$$Q_m(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0$$

SU JEDNAKA AKO SU $n = m$ I $a_i = b_i$, ZA SVAKO $i = 0, 1, \dots, n$

⊛ DELJENJE POLINOMA I NULE POLINOMA

(T) ZA SVAKA DVA NE NULA POLINOMA $P_n(z)$ I $Q_m(z)$ $(n \geq m)$ POSTOJE JEDINSTVENI POLINOMI $S(z)$ I $R(z)$, TAKVI DA JE

$$P_n(z) = Q_m(z) \cdot S(z) + R_k(z), \quad \text{GDE JE } R_k(z) = 0 \vee k < m.$$

$7 : 3 = 2 + 1$ (T – količnik, R)

$7 = 3 \cdot 2 + 1$

$R_k(z)$ JE OSTATAK, $S(z)$ JE KOLIČNIK, $Q_m(z)$ JE DELILAC

AKO JE $R_k(z)=0$, ODNOSNO $P_n(z)=Q_m(z)\cdot S(z)$, KAŽEMO DA JE POLINOM $P_n(z)$ DELJIV POLINOMOM $Q_m(z)$, TJ. PIŠEMO $Q_m(z) \mid P_n(z)$.

<u>PRIMER</u> ODREDITI OSTATAK I KOLIČNIK PRI DELJENJU POLINOMA $P(x)=x^4+3x^3-3x-3$ SA $Q(x)=x^3-2x^2-1$.

NAPOMENA: KOD REALNIH POLINOMA PROMENLJIVA SE ČESTO OBELEŽAVA SA x.

<u>DEF.</u> <u>NAJVEĆI ZAJEDNIČKI DELILAC</u> (NZD) POLINOMA $P(z)$ I $Q(z)$ JE POLINOM $D(z)$, AKO VAŽE (1) I (2):

(1) $D(z) \mid P(z) \wedge D(z) \mid Q(z)$;

(2) ZA SVAKI POLINOM $R(z)$ KOJI DELI $P(z)$ I $Q(z)$ VAŽI DA ~~JE~~ $R(z) \mid D(z)$.

- LAKO JE VIDETI DA NZD NIJE JEDINSTVEN: $\alpha \cdot D(z)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ JE TAKOĐE NZD.

<u>REŠ.</u>

$$
\begin{array}{l}
x^4+3x^3-3x-3 : (x^3-2x^2-1) = x+5 \\
\underline{-x^4+2x^3+x} \\
\quad 5x^3-2x-3 \\
\quad \underline{-5x^3+10x^2+5} \\
\quad 10x^2-2x+2 = R_2(x)
\end{array}
$$

$Q_1(x)=x+5 \leftarrow$ KOLIČNIK

$R_2(x)=10x^2-2x+2 \leftarrow$ OSTATAK

$$\Downarrow$$

$$x^4+3x^3-3x-3=(x^3-2x^2-1)\cdot(x+5)+10x^2-2x+2 \quad / : (x^3-2x^2-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^4+3x^3-3x-3}{x^3-2x^2-1}=x+5+\frac{10x^2-2x+2}{x^3-2x^2-1}$$

T (BEZUOVA TEOREMA) OSTATAK PRI DELJENJU POLINOMA $P(z)$ SA $(z-z_0)$ JEDNAK JE $P(z_0)$.

DOKAZ

$$P(z) = (z-z_0)\left(b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_0\right) + R$$

$$P(z_0) = 0 \cdot (\qquad\qquad) + R$$

$$P(z_0) = R$$

- HORNEROVA ŠEMA SLUŽI ZA ODREĐIVANJE KOEFICIJENATA POLINOMA KOLIČNIKA ~~PRI DE~~ $b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1 z + b_0$ i ostatka R, PRI DELJENJU POLINOMA $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ SA POLINOMOM $(z-z_0)$.

$$P_n(z) = (z-z_0)\left(b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1 z + b_0\right) + R$$

z_0	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
	a_n	$z_0 b_{n-1} + a_{n-1}$		$z_0 b_1 + a_1$	$z_0 b_0 + a_0$
	$\parallel$	$\parallel$		$\parallel$	$\parallel$
	b_{n-1}	b_{n-2}		b_0	R

$$\parallel$$

$$Q(z) = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_0$$

PRIMER ODREDITI KOLIČNIK I OSTATAK PRI DELJENJU POLINOMA $P(x) = x^5 - 5x^4 - x + 5$ SA $Q(x) = x+1$.

REŠ. KORISTIĆEMO HORNEROVU ŠEMU.

$x+1 = x-(-1)$ $(x_0 = -1)$ $\leadsto$ $x+1 = x - x_0$

-1	1	-5	0	0	-1	5	
	1	-6	6	-6	5	0	$= R$

$$\Downarrow$$

$$P(x) = (x+1)(x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 5)$$

DEF: NULA ILI KOREN POLINOMA $P(z)$ JE $z_0 \in \mathbb{C}$ ZA KOJI JE $P(z_0)=0$.

$P(z_0)=0 \Rightarrow R = P(z_0) = 0$ ~~⇒ P(z) =~~

$\Updownarrow$ BEZUOVA TEOR

$P(z)$ JE DELJIV SA $(z-z_0)$.

$$P_n(z) = (z-z_0)\cdot\underbrace{(\qquad)}_{Q_{n-1}(z)} + 0$$

- AKO JE $(z-z_0)^m \mid P(z)$ ONDA KAŽEMO DA JE z_0 KOREN VIŠESTRUKOSTI m POLINOMA $P(z)$

$$P(z) = (z-z_0)^m\cdot(\qquad) + 0$$

(T) SVAKI POLINOM STEPENA n $(n \geq 1)$ ~~NAD~~ ~~POLJEM~~ IMA BAR ~~JDN~~ JEDNU NULU I NE MOŽE IMATI VIŠE OD n NULA.

(T) SVAKI POLINOM

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

MOŽE SE NA JEDINSTVEN, DO REDOSLEDA FAKTORA, PREDSTAVITI U OBLIKU PROIZVODA

$$P_n(z) = a_n\cdot(z-z_1)^{k_1}\cdot(z-z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_s)^{k_s}$$

$(= a_n(z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdots(z-z_n)$, AKO SU SVE NULE JEDNOSTRUKE$)$

GDE SU z_i NULE POLINOMA,

$k_i \in \mathbb{N}$, $i=1,2,\dots,s$ I $k_1+k_2+\dots+k_s = n$,

k_i JE VIŠESTRUKOST NULE z_i, $i=1,2,\dots,s$.

(T) POLINOM STEPENA n $(n \geq 1)$ IMA ~~...~~ n NULA, RAČUNAJUĆI SVAKU NULU ONOLIKO PUTA KOLIKA ~~JOJ~~ JE VIŠESTRUKOST

P5

- VIETOVE FORMULE

~~POV~~ DAJU VEZU IZMEĐU NULE I KOEFICIJENATA POLINOMA.

POSMATRAJMO POLINOM

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

ČIJE SU NULE $z_1, z_2, \dots, z_n$.

TADA VAŽE VIETOVE FORMULE:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{z_1 \cdot z_2 \cdots z_k}_{k} + \dots + \underbrace{z_{n-k+1} \cdots z_n}_{k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n},$$

$$\vdots$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}.$$

U SLUČAJU KADA JE $n=3$, IMAMO:

$$P_3(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

z_1, z_2, z_3 - NULE POLINOMA

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$