NULE REALNIH POLINOMA

NEKA JE $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$,

GDE SU $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, REALAN POLINOM STEPENA n.

(T) AKO JE z_1 KOMPLEKSNA NULA POLINOMA $P_n(z)$ REDA k, TADA JE I $\overline{z_1}$ TAKOĐE NULA TOG POLINOMA REDA k.

„KOMPLEKSNE NULE SE JAVLJAJU U PARU, KAO KOMPLEKSNO-KONJUGOVANE NULE."

z_1 NULA $\Rightarrow$ $\overline{z_1}$ NULA

$z_1 = a + ib \Rightarrow \overline{z_1} = a - ib$

$z_1 = 1 + 2i$ NULA

$\Downarrow$

$\overline{z_1} = 1 - 2i$ JE TAKOĐE NULA

POSLEDICA REALNI POLINOM NEPARNOG STEPENA IMA BAR JEDNU REALNU NULU.

DOKAZ AKO SU SVE NULE KOMPLEKSNE, STEPEN POLINOMA NE MOŽE BITI NEPARAN.

PRIMER $P_3(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

MOŽE BITI:

1° $P_3(z) = a_3 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = a_n (z - z_1)(z^2 + pz + q)$

$\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{C}$ $\quad \mathbb{C}$

$z_1 \in \mathbb{R}$ $\quad z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$z_1 \in \mathbb{R}$ $\quad p^2 - 4q < 0$

NEMA REALNIH NULA

$D_s = p^2 - 4q$

2° $P_3(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot (z - z_3)$

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$

T (TEOREMA O MOGUĆIM RACIONALNIM NULAMA)

NEKA JE $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, GDE SU $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$, POLINOM SA CELOBROJNIM KOEFICIJENTIMA. TADA VAŽI:

$\frac{p}{q}$ RACIONALNA NULA (p I q SU UZAJAMNO PROSTI CELI BROJEVI, $q \neq 0$) POLINOMA $P_n(z)$

$$\Downarrow$$

$p \mid a_0 \wedge q \mid a_n$ (p DELI a_0, A q DELI a_n).

~~DAKLE~~

- DAKLE, MOGUĆE RACIONALNE NULE SU OBLIKA $\frac{p}{q}$, GDE $p \mid a_0$, A $q \mid a_n$. OBIČNO FORMIRAMO SKUP SVIH MOGUĆIH TAKVIH BROJEVA $\frac{p}{q}$ I PROVERAVAMO KOJE OD TIH BROJEVA SU NULE POLINOMA.

PRIMER ODREDITI NULE I FAKTORISATI POLINOM
$$P(x) = x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 7x + 6.$$

REŠ. MOGUĆE RACIONALNE NULE SU

$p \mid 6 \Rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ ← ČINIOCI ILI DELITELJI BROJA 6

$q \mid 1 \Rightarrow q \in \{\pm 1\}$ ← DELIOCI BROJA 1

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ ← SKUP MOGUĆIH RACIONALNIH NULA

PROVERAVAMO, HORNEROVOM ŠEMOM, KOJE OD TIH BROJEVA SU STVARNO NULE:

$x - x_0 = x - 1$

$x_0 = 1$

	1	0	-6	6	-7	6
1	1	1	-5	1	-6	0

$0 = R \Rightarrow 1$ JE NULA!

(P3)

$$P(x) = (x-1)(x^4+x^3-5x^2+x-6)$$

$x_0 = 2$

2	1	1	-5	1	-6
	1	3	1	3	0

$= R \Rightarrow$ 2 JE NULA!

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x^3+3x^2+x+3)$$

$x_0 = 3$

3	1	3	1	3
	1	6	19	60

$\neq 0 \Rightarrow$ 3 NIJE NULA!

$x_0 = -3$

-3	1	3	1	3
	1	0	1	0

$= R \Rightarrow -3$ JEST NULA!

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)(x^2+1)$$

OČIGLEDNO $x^2+1=0$ NEMA REALNIH NULA, ALI IMA KOMPLEKSNE NULE: $x = i$ i $x = -i$ (JASNO $\bar{i} = -i$).

$P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)(x-i)(x+i)$ ← FAKTORIZACIJA NAD $\mathbb{C}$

$P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)(x^2+1)$ ← FAKTORIZACIJA NAD $\mathbb{R}$

NULE POLINOMA SU: $1, 2, -3, i, -i$.

* RACIONALNE FUNKCIJE

- FUNKCIJU OBLIKA

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ GDE SU } P_n(x) \text{ I } Q_m(x)$$

~~BO~~ REALNI POLINOMI n-TOG I m-TOG STEPENA, ~~RESPEKTIVNO~~, RESPEKTIVNO,

NAZIVAMO RACIONALNA FUNKCIJA.

AKO JE $n < m$, ONDA JE $R(x)$ PRAVA RAC. FUNKCIJA.

- VAŽI: NEPRAVA RAC. FUNK. = POLINOM + PRAVA RAC. FUNK.

  TO SE POSTIŽE DELJENJEM NEPRAVE RAC. FUNK.

- PROST ILI PARCIJALNI RAZLOMAK JE FUNKCIJA OBLIKA

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{ILI} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l},$$

GDE SU $A, B, C \in \mathbb{R}$, $a, p, q \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$ I

VAŽI DA JE $p^2 - 4q < 0$.

(T) (TEOREMA O RASTAVLJANJU NA PARCIJALNE RAZLOMKE)

SVAKA PRAVA RACIONALNA FUNKCIJA SE MOŽE PREDSTAVITI U OBLIKU ZBIRA PARCIJALNIH RAZLOMAKA:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k (x^2+px+q)^l} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} +$$

$(p^2 - 4q < 0)$

$$+ \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_l x + C_l}{(x^2+px+q)^l}$$

PRIMER RASTAVITI NA PARCIJALNE RAZLOMKE FUNKCIJU

$$R(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

P5

REŠ.

R(x) JE PRAVA RAC. FUNK. / $x^2+x+1=0$ NE REALNIH NULA

$(p^2-4q = 1-4 < 0)$.

$ax^2+bx+c=0$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$D_s = b^2-4ac \rightsquigarrow p^2-4q$

x^2+px+q

(T)

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad / (x-1)(x^2+x+1)$$

$k=1,\ l=1$

$$2x+1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$2x+1 = x^2(A+B) + x(A-B+C) + A-C$$

$x^2:\ A+B=0$

$A-B+C=2 \iff$

$A-C=1$

$A=-B$

$-2B+C=2 \iff$

$-B-C=1$

$A=-B$

$B=-1-C$

$-2(-1-C)+C=2$

$\iff$ $A=-B$, $B=-1-C$, $3C=0$ $\iff$ $A=1$, $B=-1$, $C=0$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x}{x^2+x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+x+1}$$

PRIMER RASTAVITI NA ZBIR PARCIJALNIH RAZLOMAKA RAC. FUN.

a) $$\frac{x^2-3x+1}{(x^2+2x+1)^2(x+2)} = \frac{x^2-3x+1}{(x+1)^2(x+2)} \overset{(T)}{=} \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x+2} \ldots$$

PRAVA RAC $= \checkmark$.

$x^2+2x+1=0$

$$x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

$\rightsquigarrow x^2+2x+1 = (x+1)^2$

b) $$\frac{2x^2-3x+7}{(x^2+2x+3)^2(x+1)^3} \stackrel{(T)}{=} \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+2x+3} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2x+3)^2} \dots$$

PRAVI RAZ. ✓

$$x^2+2x+3=0$$

$$x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$A_1, A_2, A_3, B_1, C_1, B_2, C_2 = ?$

$= ? \dots$

PRIMER ODREDITI REALAN POLINOM NAJMANJEG STEPENA TAKO DA BROJ -1 BUDE DVOSTRUKI, A BROJEVI 2 I $(1-i)$ JEDNOSTRUKI KORENI TOG POLINOMA.

Reš.

$$P(x) = (\quad)\cdot(\quad)\cdot(\quad)\cdot(\quad) \dots$$

-1 JE DVOSTRUKI KOREN $\rightsquigarrow (x-(-1))^2 = (x+1)^2$

2 JE JEDNOSTRUKI KOREN $\rightsquigarrow (x-2)$

$1-i$ KOREN $\Rightarrow \overline{1-i} = 1+i \rightsquigarrow ((x-1)+i)\cdot((x-1)-i) =$

$$= (x-1)^2 - i^2 = (x^2-2x+1) - (-1) =$$

$$= x^2-2x+1+1 = x^2-2x+2$$

$$P(x) = (x+1)^2(x-2)(x^2-2x+2) = \dots = x^5-2x^4-x^3+4x^2-2x-4$$