



Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka



PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.Z106)
STUDIJSKI PROGRAM: GT, ZR, ZU

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Nehomogena linearna d.j. višeg reda sa konstantnim koeficijentima
Metod upoređivanja
Varijacija konstanti
Radna nedelja br. 11

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

Beleške

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$$

HOMOGENA LIN. DIF. JEDNAČINA.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \leftarrow \text{OPŠTE REŠENJE}$$

0.1 Nehomogene linearne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

U ovom odeljku posmatraćemo diferencijalne jednačine oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (1)$$

gde su a_1, a_2, \dots, a_n konstante, a funkcija $f(x)$ različita od nule. Sledeća teorema određuje oblik opšteg rešenja ove diferencijalne jednačine.

Teorema 1 Neka je $y_p(x)$ jedno **partikularno rešenje nehomogene linearne jednačine n -tog reda (1)**, a

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

opšte rešenje **odgovarajuće homogene jednačine**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0.$$

Tada je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (2)$$

opšte rešenje nehomogene jednačine (1).

Dokaz. Prvo pokažimo da je $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ rešenje nehomogene jednačine (1). Po pretpostavci, y_p je rešenje jednačine (1), tj. važi

$$y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} + a_2 y_p^{(n-2)} + \dots + a_n y_p = f(x). \quad (3)$$

Funkcija y_h zadovoljava odgovarajuću homogenu jednačinu, odnosno

$$y_h^{(n)} + a_1 y_h^{(n-1)} + a_2 y_h^{(n-2)} + \dots + a_n y_h = 0. \quad (4)$$

Sabiranjem jednačina (3) i (4) dobijamo

$$(y_h + y_p)^{(n)} + a_1 (y_h + y_p)^{(n-1)} + \dots + a_n (y_h + y_p) = f(x),$$

što dokazuje da je funkcija (2) rešenje nehomogene jednačine (1). Treba još pokazati da je ono i opšte rešenje, tj. da za svaki početni uslov moguće je odrediti odgovarajuće konstante $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \dots, C_n = C_{n0}$. Posmatrajmo sledeći početni uslov

$$y(x_0) = A_0, y'(x_0) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1},$$

$$y = y_h + y_p \leftarrow ?$$

↑ poznato



0.1.1 Metod jednakih koeficijenata

$$y_p(x)$$

Teorema 1 određuje opšte rešenje nehomogene jednačine sa konstantnim koeficijentima (1) u obliku $y = y_h + y_p$. Funkcija y_h je opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine (kada je $f(x) = 0$), koje možemo odrediti na način koji je opisan u odeljku ?? . Ostaje da odredimo jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine y_p . To ćemo učiniti **metodom jednakih koeficijenata**, koji se ponekad naziva i **metod upoređivanja**. Ovaj metod se primenjuje u slučaju kada je nehomogeni deo (funkcija $f(x)$) na desnoj strani jednačine (1) određenog oblika - tipska funkcija.

Posmatrajmo linearnu nehomogenu jednačinu sa konstantnim koeficijentima oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x], \quad (7)$$

gde su a_1, a_2, \dots, a_n i α, β realni brojevi, a $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n -tog, odnosno m -tog stepena. Pretpostavimo da bar jedan od polinoma $P_n(x)$ ili $Q_m(x)$ različit od nula polinoma.

Partikularno rešenje nehomogene jednačine (7) tražimo u sledećem obliku

$$y_p = x^s e^{\alpha x} [R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x],$$

gde su $R_l(x)$ i $S_l(x)$ polinomi stepena l , pri čemu je $l = \max\{n, m\}$. Prirodan broj s je višestrukost korena $\alpha + \beta i$ u karakterističnoj jednačini odgovarajuće homogene jednačine

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (8)$$

Ako $\alpha + \beta i$ nije koren karakteristične jednačine (8), onda uzimamo da je $s = 0$. Dokaz da y_p zaista ima oblik partikularnog rešenja čitalac može da nađe u [?].

Koeficijente nepoznatih polinoma $R_l(x)$ i $S_l(x)$ određujemo ubacivanjem y_p i odgovarajućih izvoda ($y_p', y_p'', \dots, y_p^{(n)}$) u datu jednačinu (7). Izjednačavanjem nepoznatih koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x sa leve i desne strane jednačine dolazimo do linearnog sistema jednačina. Rešavanjem ovog sistema određujemo koeficijente polinoma $R_l(x)$ i $S_l(x)$, odnosno traženo partikularno rešenje y_p .

• SPECIJALNI SLUČAJ FUNKCIJE $f(x)$

$$\text{AKO JE } f(x) = P_n(x),$$

$$\text{TADA SU } \alpha = 0, \beta = 0, \mu = 0.$$

PARTIKULARNO REŠENJE TRAJIMO u OBLICI

$$y_p = x^s \cdot e^{0x} \cdot (P_e(x) \cos(0 \cdot x) + S_e(x) \sin(0 \cdot x))$$

$$l = \max\{\mu, 0\} = \mu$$

S JE VIŠESTRANOST $0 + i \cdot 0 = 0$ KAO
KOLENA u k.j.

Beleške

$$y_p = x^s \cdot R_n(x)$$

PRIMER NAČI OPŠTE REŠENJE D.J. $y'' + 2y = x^2 + 1$. (*)

Rei. $y = y_h + y_p$

y_h $y'' + 2y = 0$. k.j. $\lambda^2 + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{2}$
 $\lambda_2 = -i\sqrt{2}$
 $\lambda_1 = i\sqrt{2} = 0 + i\sqrt{2} \Rightarrow y_1 = e^{0x} \cdot \cos(\sqrt{2}x)$
 $\lambda_2 = -i\sqrt{2} = 0 - i\sqrt{2} \Rightarrow y_2 = e^{0x} \cdot \sin(\sqrt{2}x)$

$$y_h = C_1 \cdot \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{2}x)$$

y_p $f(x) = x^2 + 1 = e^{0x} \left((x^2 + 1) \cos(0 \cdot x) + 0 \cdot \sin(0 \cdot x) \right)$

\downarrow
 $L = 0, \beta = 0, P_2(x) = x^2 + 1$
 $n = 2$

$Q_0(x) = 0, \mu = 0$

$$y_{\text{sp}} = x^s e^{\alpha x} \left(R_e(x) \cos \beta x + S_e(x) \sin \beta x \right)$$

$$l = \max\{u, m\} = \max\{2, 0\} = 2$$

$$\underline{s} = 2 + \beta i = 0 \text{ NIJE KOREN K.J. } (0 \neq i\sqrt{2} \wedge 0 \neq -i\sqrt{2})$$

Beleške

⇓

$$s = 0$$

$$y_{\text{sp}} = x^0 e^{0x} (R_2(x) \cdot 1 + 0) = R_2(x) = \underline{Ax^2 + Bx + C}$$

$$y_{\text{sp}} = Ax^2 + Bx + C, \quad A, B, C = ?$$

$$y'_{\text{sp}} = 2Ax + B, \quad y''_{\text{sp}} = 2A$$

$$(*) \rightarrow 2A + 2 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1$$

$$2A + 2C + 2Ax^2 + 2Bx = x^2 + 1$$

$$\text{sl. } x^0: \quad 2A + 2C = 1$$

~~$$A + 2C = 1$$~~

$$C = 0$$

$$x: \quad 2B = 0$$

$$(\Rightarrow) B = 0$$

$$(\Rightarrow) B = 0$$

$$(\Rightarrow) B = 0$$

$$B = 0$$

$$x^2: \quad \underline{2A = 1}$$

$$\underline{A = \frac{1}{2}}$$

$$\underline{A = \frac{1}{2}}$$

$$y_{\text{sp}} = \frac{1}{2}x^2 + 0 \cdot x + 0 = \frac{1}{2}x^2$$

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{sp}} = \underbrace{C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x + \frac{1}{2}x^2}_{\text{OPŠTE REŠ.}}$$

PRIMER NAČI OPŠTE REŠENJE D.J. $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x$,

Reš. $y = y_h + y_p$ (*)

y_h k.j. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$

Beleške $\lambda_1 = 2$
 $\lambda_2 = 2$

$y_h = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot x e^{2x}$

y_p $f(x) = \sin 2x = e^{0 \cdot x} \cdot \left(P_0(x) \sin 2x + Q_0(x) \cdot \cos 2x \right)$
 $\alpha = 0, \beta = 2, m = 0, n = 0$

S $\alpha + \beta i = 0 + 2i = 2i \neq 2 \rightarrow$ NIJE KOREN k.j.
 $\rightarrow s = 0$

l $l = \max\{n, m\} = \max\{0, 0\} = 0$

$y_p = x^s \cdot e^{\alpha x} \left(R_e(x) \cos \beta x + S_e(x) \sin \beta x \right)$
 $= x^0 \cdot e^{0 \cdot x} \left(A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin 2x \right)$

$y_p = A \cos 2x + B \cdot \sin 2x, \quad A, B = ?$

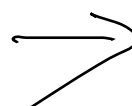
$y_p' = A \sin(2x) \cdot 2 + 2B \cos 2x = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$

$y_p'' = (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$

(*) $\rightarrow -4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 8A \sin 2x - 8B \cos 2x + 4A \cos 2x + 4B \sin 2x = \sin 2x \Leftrightarrow 8A \sin 2x - 8B \cos 2x = \sin 2x$

$$\begin{aligned} \sin 2x: & \quad PA = 1 & \Leftrightarrow & \quad A = \frac{1}{P} \\ \cos 2x: & \quad -PB = 0 & & \quad B = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{\text{sp}} = \frac{1}{P} \cos 2x}$$

$$y = y_h + y_{\text{sp}} = \underbrace{C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}}_{\text{OPŠTE REŠENJE}} + \frac{1}{P} \cos 2x$$

10
 **0.2** Metod varijacija konstanti

Varijacija konstanti je metod za rešavanje linearnih nehomogenih jednačina višeg reda, međutim ovde se ne zahteva da koeficijenti budu konstante. Posmatraćemo linearnu jednačinu n -tog reda oblika

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (9) \quad y = y(x) = ?$$

gde su $f(x)$ i koeficijenti $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom $D \in \mathbb{R}$. Takođe, za razliku od prethodnih razmatranja (metod jednakih koeficijenata), ovde nećemo zahtevati da funkcija $f(x)$ ima specijalan (tipski) oblik. To znači da ovaj metod može da obuhvati mnogo širu klasu diferencijalnih jednačina u odnosu na metod jednakih koeficijenata.

Pretpostavimo da su $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene jednačine

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (10)$$

Glavna ideja je da opšte rešenje polazne nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x), \quad (11)$$

gde su $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ sada nepoznate funkcije, koje treba da odredimo u daljem postupku. Ovde se radi o n funkcija za čije određivanje ćemo tražiti n uslova, odnosno jednačina. U nastavku ćemo opisati kako dolazimo do tih n uslova, odnosno do sistema od n jednačina za određivanje nepoznatih funkcija $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$.

Nalaženjem prvog izvoda funkcije y u (11) i malim grupisanjem članova dobijamo

$$y' = (C_1'y_1 + C_2'y_2 + \dots + C_n'y_n) + C_1y_1' + C_2y_2' + \dots + C_ny_n'$$

Za prvi uslov za određivanje funkcija $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ uzećemo da je izraz u zagradi jednak nuli, tj.

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + \dots + C_n'y_n = 0. \quad (12)$$

Sada je $y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \dots + C_ny_n'$, odnosno za drugi izvod rešenja dobijamo

$$y'' = (C_1'y_1' + C_2'y_2' + \dots + C_n'y_n') + C_1y_1'' + C_2y_2'' + \dots + C_ny_n''$$

$C_1 \rightarrow C_1(x)$
 $C_2 \rightarrow C_2(x)$
 $C_3 \rightarrow C_3(x)$
 \vdots
 $C_n \rightarrow C_n(x)$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

Slično kao u slučaju prvog izvoda y' , izjednačavanjem izraza u zagradi sa nulom dolazimo do drugog uslova

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0, \quad (13)$$

a za drugi zvod rešenja će važiti da je $y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \dots + C_n y''_n$. Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo da $(n-1)$ -og izvoda

$$y^{(n-1)} = (C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)}) + C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)},$$

odnosno do odgovarajućeg uslova

$$C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0, \quad (14)$$

što konačno daje $y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}$. Odavde dobijamo n -ti izvod rešenja

$$y^{(n)} = (C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)}) + C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)}.$$

Ako sada ponovo izjednačimo izraz u zagradi sa nulom, dobićemo homogeni linearni sistem sa n jednačina i sa nepoznatama C'_1, C'_2, \dots, C'_n , čije bi rešenje bilo trivijalno, tj. $(C'_1, C'_2, \dots, C'_n) = (0, 0, \dots, 0)$. To bi značilo da su funkcije $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ konstante, što ne bi dovelo do traženog rešenja nehomogene jednačine (9), jer prema teoremi ?? time bi dobili opšte rešenje homogene jednačine. Dakle, n -ti uslov ćemo odrediti na drugačiji način. Uvrštavanjem funkcija $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ u polaznu nehomogenu jednačinu (9), i uz grupisanje članova koje sadrže C_1, C_2, \dots, C_n , dobijamo

$$\begin{aligned} & C_1 \left(y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + a_2(x) y_1^{(n-2)} + \dots + a_n(x) y_1 \right) + \\ & C_2 \left(y_2^{(n)} + a_1(x) y_2^{(n-1)} + a_2(x) y_2^{(n-2)} + \dots + a_n(x) y_2 \right) + \\ & \quad \vdots \\ & C_n \left(y_n^{(n)} + a_1(x) y_n^{(n-1)} + a_2(x) y_n^{(n-2)} + \dots + a_n(x) y_n \right) + \\ & C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Iz pretpostavke da su funkcije y_1, y_2, \dots, y_n rešenja homogene jednačine (10), sledi da su svi izrazi u zagradama jednaki nuli, odnosno jednačina (15) se svodi na sledeći oblik

$$C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x), \quad (16)$$

PRIMER NAČI OPŠTE REŠENJE D.Č.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

Pris. $\frac{e^x}{x} \neq e^{\alpha x} (P_n(x) \text{ or } (\beta x + Q_m(x)) \Leftrightarrow \beta x)$

13

$x^{-1} \notin$ POLINOM Beleške

y_h $y'' - 2y' + y = 0 \quad \leadsto \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$
 $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

n. VAR. CONST $\rightarrow y = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x$
 $c_1(x) = ? \quad c_2(x) = ?$
 $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x e^x$

$$c_1' y_1(x) + c_2' y_2(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$c_1' y_1'(x) + c_2' y_2'(x) = f(x)$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0 & /: e^x \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} c_1' e^x + c_2' (e^x + x e^x) = \frac{e^x}{x} & /: e^x \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} c_1' + c_2' (1+x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} c_2' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} c_1' = -1 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} c_1' + \frac{1}{x} x = 0 \end{cases}$$

$$c_2' = \frac{1}{x}$$

\Leftrightarrow

$$c_1' = -1$$

$$\rightarrow c_1(x) = \int (-1) dx = -x + \hat{c}_1$$

$$c_2' = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow c_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \hat{c}_2$$

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) \cdot x e^x = (-x + \bar{c}_1) e^x + (\ln|x| + \bar{c}_2) \cdot x e^x$$

$$y = \bar{c}_1 e^x + \bar{c}_2 x e^x + x e^x \ln|x| - e^x \cdot x$$

14

Beleške

$$y = \underbrace{\bar{c}_1 e^x + \bar{c}_2 x e^x}_{y_h} + \underbrace{x e^x (\ln|x| - 1)}_{y_p}$$

$\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \mathbb{R}$ \swarrow OPŠTE REŠ.

PRIMER NAEI, OPŠTE REŠ. D.]

$$y'' - \frac{y'}{x} = x,$$

Reš.

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0$$

ODREĐIMO OPŠTE REŠENJE
ODHOMOGENE HOM. D.]

TAKÉ SADRŽI y'

SMENOM $y' = p(x) \rightarrow y''(x) = p'(x)$

$$p' - \frac{p}{x} = 0 \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln C = \ln x C$$

$$p = x \cdot C \rightarrow y' = x \cdot C$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot C \rightarrow dy = x C dx \rightarrow y = \frac{x^2}{2} C + C_2$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 \quad (c_1 = \frac{c}{2})$$

$$y_1(x) = x^2 \quad y_2(x) = 1$$

* ...
 n VAR. konst. $\rightarrow y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$

$$c_1 \rightarrow c_1(x) = ?$$

$$c_2 = c_2(x) = ?$$

Beleške ($n=2$)

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

(=)

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = x$$

$$(=) \quad c_1' x^2 + c_2' \cdot 1 = 0$$

$$c_1' x^2 + c_2' \cdot 1 = 0$$

$$c_1' 2x + c_2' \cdot 0 = x$$

(=)

$$c_1' 2x = x$$

(=)

$$(=) \quad \frac{1}{2} x^2 + c_2' = 0$$

$$c_2' = -\frac{1}{2} x^2 \rightarrow c_2(x) = \int -\frac{1}{2} x^2 dx = -\frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \bar{c}_2$$

$$c_1' = \frac{1}{2}$$

(=)

$$c_1' = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow c_1(x) = \int \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \bar{c}_1$$

$$c_2(x) = -\frac{x^3}{6} + \bar{c}_2$$

$$c_1(x) = \frac{1}{2} x + \bar{c}_1$$

$$y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} x + \bar{c}_1 \right) \cdot x^2 + \left(-\frac{x^3}{6} + \bar{c}_2 \right) \cdot 1 =$$

$$= \bar{c}_1 x^2 + \bar{c}_2 + \frac{x^3}{3}$$

OPSTE REŠ.

$$\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$$

$y_h + y_p$