



Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka



PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.Z106)
STUDIJSKI PROGRAM: GT, ZR, ZU

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Ojlerova diferencijalna jednačina
Primeri primene diferencijalnih jednačina

Radna nedelja br. 12

Lin. dif. jedn. n-tog reda

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

— METODA UPOREĐIVANJA

• $a_1(x) = a_1$, $a_2(x) = a_2$, ..., $a_n(x) = a_n$
KONSTANTNI KOEF.

Prof. dr Tibor Lukić

• $f(x)$ JE TIPSKA FUNKCIJA

— VARIJABLA KONSTANTI

— OJLEROVA METODA ...

$$a_1(x) = (ax+b)^{n-1}, \quad a_2(x) = (ax+b)^{n-2} \dots$$

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

Beleške



0.1 Ojlerova diferencijalna jednačina

Jednačine koje ćemo razmatrati u ovom odeljku pripadaju klasi linearnih diferencijalnih jednačina višeg reda sa promenljivim koeficijentima koje imaju osobinu da se odgovarajućom smenom mogu svesti na jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Ojlerova diferencijalna jednačina n -tog reda je oblika

$$(ax + b)^n y^{(n)}(x) + A_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + A_n y(x) = f(x), \quad (1)$$

gde su $a \neq 0$, b i A_1, A_2, \dots, A_n realni koeficijenti. Prisetimo da je stepen linearnog člana $ax + b$ jednak redu izvoda ispred koga stoji.

Posmatrajmo smenu

$$ax + b = e^t \Leftrightarrow t = \ln(ax + b),$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{ax + b} \cdot (ax + b)'$$

gde je t nova promenljiva. Cilj nam je da datu jednačinu (1) napišemo u funkciji od nove promenljive t . Najpre ćemo izraziti izvode od y po t -u:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \frac{a}{ax + b} = ae^{-t} y'_t,$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (ae^{-t} y'_t) \frac{a}{ax + b} = (y''_t e^{-t} a - y'_t e^{-t} a) e^{-t} a,$$

odnosno

$$y''(x) = a^2 e^{-2t} (y''_t - y'_t),$$

slično dobijamo i

$$y'''(x) = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = a^3 e^{-3t} (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t).$$

Postupak za određivanje ostalih izvoda $y^{IV}, y^V, \dots, y^{(n)}$ se može nastaviti na sličan način. Kada u Ojlerovu diferencijalnu jednačinu (1) uvrstimo dobijene izvode $y', y'', \dots, y^{(n)}$ dobićemo linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima u odnosu na novu promenljivu t . Takva jednačina se dalje može rešiti na način opisan u odeljku ~~7.4~~ Prisetimo da bi bilo ispravnije uvesti novu oznaku ϕ za označavanje funkcije posle uvođenja smene

$$ax + b = e^t \rightarrow x = \frac{e^t - b}{a} \rightarrow y(x) = y\left(\frac{e^t - b}{a}\right) = \phi(t),$$

međutim, zbog jednostavnijeg zapisa, umesto $\phi(t)$ pišemo $y(t)$ ili samo y .

$$y = y(x)^2$$

$$= \frac{a}{ax + b}$$

$$y^{IV} = \dots$$

$$y^V = \dots$$

NOTED
u POREČANANJA

Primer 1 Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = x.$$

$$e^0 = 1$$

Diferencijalna jednačina je Ojlerovog tipa ($a = 1, b = 0$), zato uvodimo smenu $x = e^t$. Tada imamo da je

$$y' = y'_t e^{-t} \text{ i } y'' = (y''_t - y'_t) e^{-2t}, \rightarrow e^{2t} \cdot e^{-2t} (y''_t - y'_t) -$$

$$-4 \cdot e^t \cdot e^{-t} \cdot y'_t + 6y = e^t$$

što zamenjeno u polaznu jednačinu daje

$$y''_t - 5y'_t + 6y = e^t, \quad (2)$$

što predstavlja linearnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima čije je opšte rešenje u obliku $y = y_h + y_p$. Koreni odgovarajuće karakteristične jednačine $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$, pa je

$$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

Partikularno rešenje tražimo u obliku $y_p = A e^t$, što zamenjeno u jednačinu (2) daje

$$A e^t - 5A e^t + 6A e^t = e^t, \quad / \cdot e^t$$

odnosno $A = \frac{1}{2}$ i $y_p = \frac{1}{2} e^t$. Opšte rešenje (pomoćne) jednačine (2) je oblika

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{2} e^t,$$

a vraćanjem smene $x = e^t$ dobijamo traženo rešenje polazne jednačine

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2} x.$$

$$y_p = A e^t$$

$$y'_p = A e^t$$

$$y''_p = A e^t$$

$$x = e^t \rightarrow t = \ln x$$

$$e^{2t} = e^{2 \cdot \ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2, \quad e^t = e^{\ln x} = x$$

$$y_p = x^0 e^t (A \cos 0 + B \sin 0)$$

$$y_p = A e^t$$

$$y''_t - 5y'_t + 6y = e^t$$

$$f(x) = e^t$$

$$P_0(t) \cos(0 \cdot x) + Q_0(x) \cdot \sin(0 \cdot x)$$

$$\alpha = 1, \beta = 0$$

$$u = 0, v = 1$$

$$l = \max\{0, 0\} = 0$$

$$\alpha + \beta i = 1 + i \cdot 0 = 1$$

NIJE KOREN K.

$$s = 0$$

PRIMER NAČI OPŠTE REŠ. D.3.

$$(1+x)^3 y''' + (1+x)y' - y = (1+x)^2$$

Reš OJLEBOVA D.3.

$$1+x = e^t \rightarrow t = \ln(1+x)$$

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + e^{2t}$$

$$y(x) = c_1 (1+x) + c_2 (1+x) \ln(1+x) + c_3 (1+x) \ln^2(1+x) + (1+x)^2$$

PRIMER NAČI, OPŠTE REŠENJE D.3.

$$x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0. \quad (*)$$

Reš OJLEBOVA D.3. (a=1, b=0)

SMENA $x = e^t \rightarrow t = \ln x$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = y'_t \cdot \frac{1}{e^t} = y'_t e^{-t}$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'_t}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (y'_t e^{-t}) \cdot e^{-t} = (y''_t e^{-t} - e^{-t} \cdot y'_t) e^{-t} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}$$

$$(*) \rightarrow \underbrace{e^{2t} \cdot e^{-2t}}_1 (y''_t - y'_t) + 2 \underbrace{e^t \cdot e^{-t}}_2 y'_t - 6y = 0$$

$$y''_t - y'_t + 2y'_t - 6y = 0$$

7

Beleške

$$y''_t + y'_t - 6y = 0 \quad \leftarrow \text{JEDN. SA KONST. KOEF.}$$

HOMOGENA

$$k.) \quad \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$+ \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \rightarrow \lambda_1 = 2 \\ \rightarrow \lambda_2 = -3 \end{matrix}$$

$$y = y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$$

$$t = \ln x$$

$$y(x) = C_1 e^{\ln x^2} + C_2 e^{\ln x^{-3}} = C_1 x^2 + C_2 x^{-3}$$

$$\underline{y(x) = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x^3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

PRIMER REŠITI D.J. $x^2 y'' - 4x y' + 6y = x$.

Pr. OJLEPOVA D.J. ($a=1, b=0$)

$$x = e^t \rightarrow t = \ln x$$

$$y' = y'_t e^t, \quad y'' = (y''_t - y'_t) e^{-2t}$$

$$\therefore y''_t - 5y'_t + 6y = e^t \quad \leftarrow \text{JEDN. SA KONST. KOEF.}$$

$$\boxed{\begin{matrix} y'_t = \dot{y} \\ y''_t = \ddot{y} \end{matrix}}$$

$$y = y_h + y_p \quad \dots \quad y_h = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

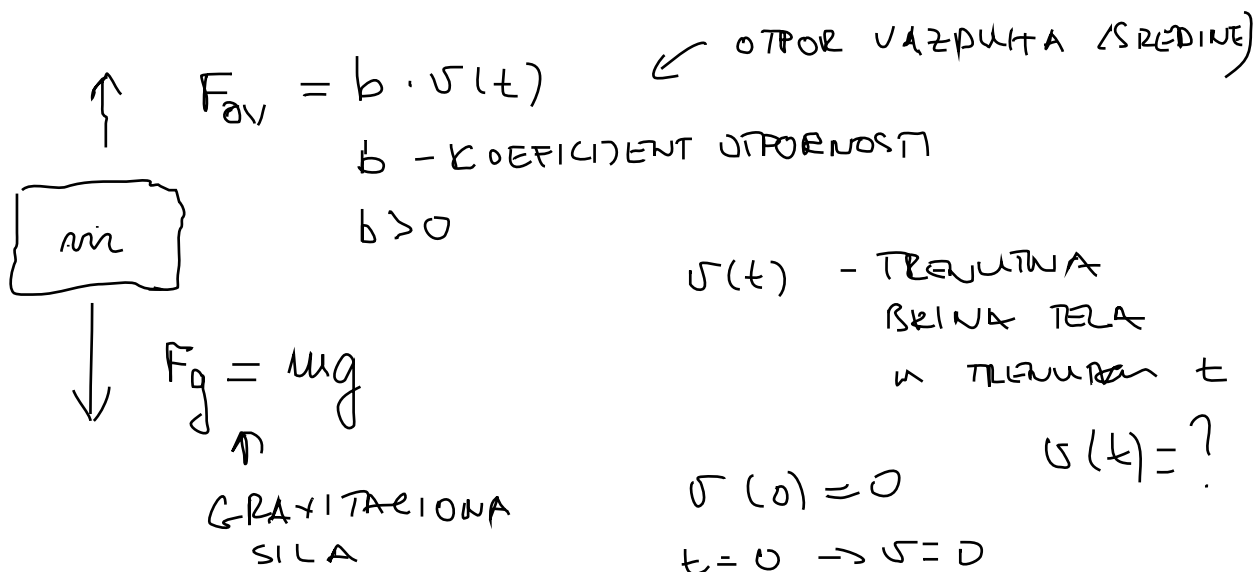
$$y_p = A e^t \rightarrow A = \frac{1}{2} \rightarrow y_p = \frac{1}{2} e^t$$

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^t$$

0.2 Primeri za primenu diferencijalnih jednačina

Primer 2 (Trenutna brzina tela u slobodnom padu) Telo mase m slobodno pada pod dejstvom gravitacione sile, savladajući otpor vazduha. Odrediti trenutnu brzinu tela $v(t)$, gde t označava vreme. Znamo da je $v(0) = 0$.

Reš.



$$F_R = F_g + F_{ox} \quad (\Leftrightarrow) \quad m \cdot a(t) = mg - b \cdot v(t)$$

↑
REZULTUJUĆA
SILA

GDE JE $a(t)$ UBZRAVJE TELA u trenutku t

$F = m \cdot a$ = DRUGI NJUTONOV ZAKON (ZAKON ODRŽANJE)

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = v'(t)$$

$$m \cdot v'(t) = mg - b v(t) \quad (\leftarrow \text{D.J. PRUOK REPA SA NEPOZNATIM FUNK. } v(t) ?)$$

$$v'(t) = \frac{mg - b v(t)}{m} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{mg - bv}{m} \quad / dt$$

$$\dot{v} = \frac{mg - bv}{m} dt \quad \rightarrow \int dv \cdot \frac{m}{mg - bv} = \int dt \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{JEDN-} \\ \text{KOD A} \\ \text{PÁZOVANÁ} \\ \text{PROBL.} \end{array}$$

$$mg - bv = z$$

$$-b dv = dz$$

$$dv = \frac{dz}{b}$$

Beleške

$$\int \left(-\frac{dz}{b}\right) \cdot m \frac{1}{z} = t \quad \rightarrow \quad -\frac{m}{b} \int \frac{dz}{z} = t$$

$$-\frac{m}{b} \ln z + c = t \quad \rightarrow \quad -\frac{m}{b} \ln(mg - bv) + c = t$$

Počátky uslov: $v(0) = 0 \Rightarrow t = 0, v = 0$

$$-\frac{m}{b} \ln(mg - b \cdot 0) + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = \frac{m}{b} \ln(mg)}$$

$$t = -\frac{m}{b} \ln(mg - bv) + \frac{m}{b} \ln(mg) = -\frac{m}{b} \left(\ln(mg - bv) - \ln(mg) \right)$$

$$t = -\frac{m}{b} \left(\ln(mg - bv) - \ln(mg) \right)$$

$$t = -\frac{m}{b} \cdot \ln \frac{mg - bv}{mg}$$

$$-\frac{b}{m} t = \ln \frac{mg - bv}{mg} \quad / e$$

$$e^{-\frac{b}{m} t} = \frac{mg - bv}{mg} \quad / : m \quad = \quad \frac{g - \frac{b}{m} v}{g}$$

$$g e^{-\frac{b}{m} t} = g - \frac{b}{m} v \quad \rightarrow \quad \frac{b}{m} v = g - g e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$v = \frac{1}{b} \left(g - g e^{-\frac{b}{m} t} \right) = \frac{mg}{b} - \frac{mg}{b} e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right)$$

10

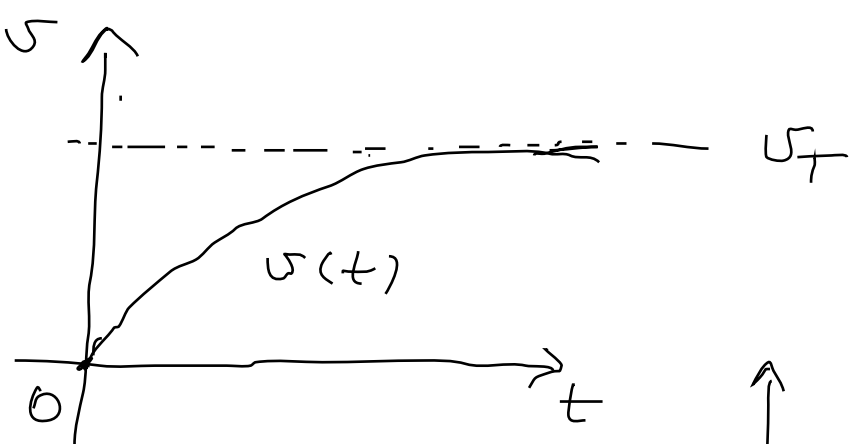
ZAPRAŽANJA

1, 2 Beleške

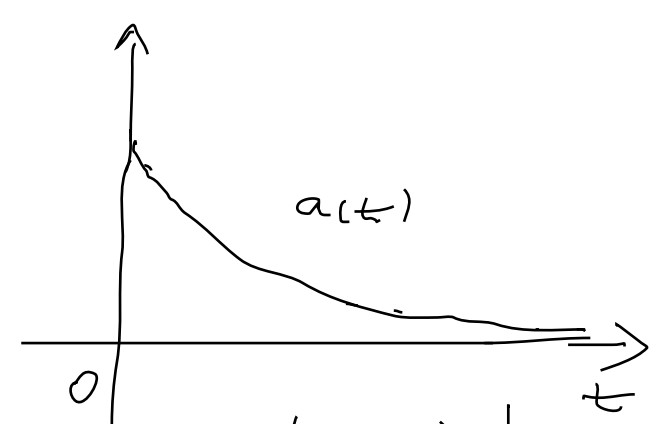
$$1) v(0) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} \cdot 0} \right) = 0$$

$$2) \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right) = \frac{mg}{b} = v_T$$

FINALNA
BRZINA
 $a = 0$



$$v_T = \frac{mg}{b}$$



$$3) a(t) = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right) \right)' = + \frac{mg}{b} \cdot e^{-\frac{b}{m} t} \cdot \left(\frac{b}{m} \right)$$

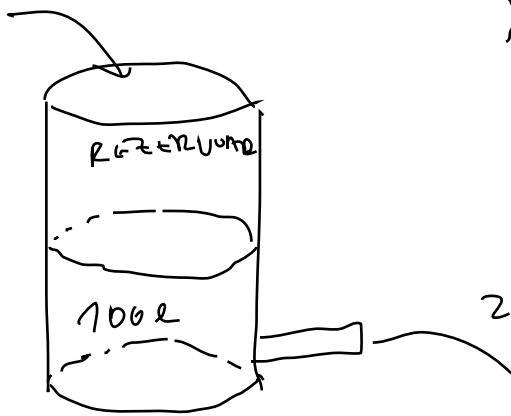
$$a(t) = g e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$\rightarrow a(0) = g e^0 = g$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$$

→ **Primer 3** U donjem delu velikog rezervoara ima 100l vodenog rastvora od 10kg soli. Voda utiče u rezervoar brzinom od 3l u minuti, a rastvor iz njega ističe brzinom od 2l u minuti, pri čemu se mešanjem održava jednaka koncentracija. Koliko soli će biti u rezervoaru po isteku jednog sata?

3 l/min



$X(t)$ — KOLIČINA SOLI (u kg)
U REZERVOARU
PO ISTOM VREMENU
 t (u min)

POČETNI USLOV:

$$X(0) = 10 \text{ kg}$$

$$X(t) = ? \quad \rightarrow \quad X(60) =$$

$$dx = -2 \cdot \frac{X(t)}{100 + t} dt$$

$$X(60) = 3,9 \text{ kg}$$

Beleške