



Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka



PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.Z106)
STUDIJSKI PROGRAM: ZR, GT i ZU

BELEŠKE SA PREDAVANJA

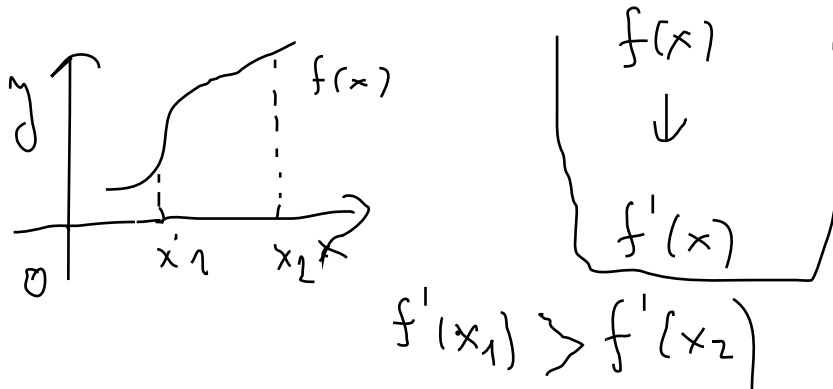
Radna nedelja br. 1

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

$$y = f(x), f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$$



• PRVI IZUOD JE MERA PROMENE FUNKCIJE.

• $f'(x)$ ZAVISI OD TAČKE, T \bar{O} $f'(x)$ JE LOKALNI OPERATOR.

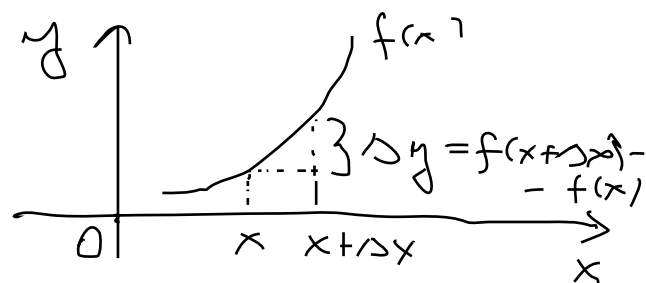
$$df = f'(x) dx$$

↑

DIFERENCIJAL FUNKCIJE

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x \approx f'(x) \cdot \Delta x$$



$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{\Delta y = df}$$

$$\boxed{df = f'(x)dx}$$

d/

$$f(x) = g(t)$$

$$df = dg$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$f'(x)dx = g'(t)dt$$

Glava 1

$f(x) \rightsquigarrow f'(x)$ "IZJAVI" $f(x) \rightsquigarrow f'(x)$
 $x^2 + 3x \rightsquigarrow 2x + 3$ "INTEGRALIZI" $f(x) \rightsquigarrow f'(x)$
 1. $\frac{x^2}{2} \leftarrow x$
 2. $-\cos x \leftarrow \sin x$

Neodređeni integral

1.1 Definicija neodređenog integrala

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na nekom intervalu realne ose. Za funkciju $F(x)$, koja je diferencijabilna na tom intervalu, kažemo da je **primitivna funkcija** za funkciju $f(x)$, ako važi da je

$$F'(x) = f(x),$$

$$f(x) = 2x^2$$

$$\downarrow$$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

za svako x iz posmatranog intervala. Primitivna funkcija nije jedinstvena, jer uvek važi

$$F'(x) = \left(\frac{2}{3}x^3\right)' = 2x^2$$

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x), \text{ gde je } C \in \mathbb{R} \text{ proizvoljna konstanta.}$$

Dakle, funkcije oblika $F(x) + C$ su primitivne za istu funkciju $f(x)$. Sa druge strane, ako su $F_1(x)$ i $F_2(x)$ dve različite primitivne funkcije za $f(x)$ na istom intervalu, tada možemo pisati

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

što znači da je

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Drugim rečima, dve primitivne funkcije za istu funkciju mogu se razlikovati samo za konstantu. To znači da ako znamo jednu primitivnu funkcije neke funkcije, ostale možemo dobiti dodavanjem odgovarajuće konstante.

Definicija 1 Neodređeni integral funkcije $f(x)$ na nekom intervalu je skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ na tom intervalu. Tada neodređeni integral obeležavamo sa $\int f(x) dx$ i pišemo

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

gde je $F(x)$ jedna primitivna funkcija za $f(x)$ na posmatranom intervalu, a $C \in \mathbb{R}$ je **integraciona konstanta**. Funkcija $f(x)$ naziva se **podintegralna funkcija**.

Postupak određivanja neodređenog integrala zovemo **integracija**. Može se pokazati da za svaku neprekidnu funkciju nad nekim intervalom $[a, b]$ postoji primitivna funkcija na intervalu $[a, b]$, odnosno postoji neodređeni integral na tom intervalu.

Napomenimo da nije uvek moguće izraziti primitivnu funkciju neprekidne funkcije, iako se zna da ona postoji. Kao primer, navodimo nekoliko takvih integrala

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{e^{x^2}}{x} dx.$$

1.2 Osobine neodređenog integrala

Sledeće osobine proizlaze iz definicije određenog integrala i mogu se lako dokazati.

1. $(\int f(x) dx)' = f(x)$,
2. $\int F'(x) dx = F(x) + C$,
3. $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

1.3 Tablica integrala

Oslanjajući se na tablicu izvoda ili neposrednom proverom, lako se mogu dokazati sledći tablični integrali.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, ~~osim~~ $\alpha \neq -1$,
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$
8. $\int e^x dx = e^x + C$,
9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$,
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C$, $|x| \leq a$,
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$, $a \in \mathbb{R}$, $x^2 - a^2 > 0$.

1.4 Integracija pomoću smene $\int \sqrt{2x+1} dx =$

Jedna od najvažnijih metoda kojom se neodređeni integral može svesti na neki tablični integral je metoda smene. Sledeća teorema opisuje način uvođenja smene promenljive u neodređeni integral.

Teorema 1 Neka je $\varphi(t)$ funkcija koja na nekom intervalu $[a, b]$ ima neprekidan prvi izvod i važi da je $\varphi'(t) \neq 0$ za svako $x \in [a, b]$. Tada za smenu $x = \varphi(t)$, na posmatranom intervalu važi

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (1.1)$$

Dokaz. Tražeći izvod desne strane relacije (1.1) dobijamo

$$\frac{d}{dx} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \frac{d}{dt} \left(\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \right) \cdot \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$= f(\varphi(t)) = f(x).$$

Dakle, dobili smo da je izvod desne strane formule (1.1) $f(x)$, što odgovara izvodu neodređenog integrala sa leve strane relacije, što je i trebalo dokazati. Napominjemo da je ovde korišćeno da je $\frac{dt}{dx}$ izvod inverzne funkcije $t = \varphi^{-1}(x)$ koja postoji na osnovu pretpostavke da je $\varphi'(t)$ neprekidna funkcija i različita od nule na posmatranom intervalu $[a, b]$, tj. $\varphi'(t)$ je stalnog znaka, odnosno $\varphi(t)$ je monotona. \square

1.5 Parcijalna integracija

Parcijalna integracija je često korišćeni metod za svođenje netabličnih integrala na tablične.

Pretpostavimo da su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije na intervalu (a, b) . Na osnovu pravila za izvod proizvoda dve funkcije, sledi

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

odnosno

$$(u(x)v(x))' dx = u'(x)v(x) dx + u(x)v'(x) dx.$$

Integracijom leve i desne strane ove jednakosti, dobijamo

$$\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx.$$

Na osnovu osobine 2 nedoređenog integrala, sledi

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx,$$

što daje **formulu za parcijalnu integraciju**

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Ako koristimo oznake $v'(x) dx = dv$ i $u'(x) dx = du$, dolazimo do kompaktnijeg zapisa formule za parcijalnu integraciju

$$\int u \cdot dv = uv - \int v du.$$

PRIMER.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x \left(\ln x - 1 \right) + C$$

$u = \ln x \quad dv = dx$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int dv = \int dx$$

$$v = x$$

7

1.6 Primeri

1.6.1 Osobine neodređenog integrala

1. Rešiti sledeće integrale:

$$(a) \int (6x^2 + 8x + 3) dx.$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

Rešenje: Koristeći osobine linearnosti neodređenog integrala imamo

$$\begin{aligned} \int (6x^2 + 8x + 3) dx &= \int 6x^2 dx + \int 8x dx + \int 3 dx \\ &= 6 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 3 \int dx \\ &= 2x^3 + 4x^2 + 3x + C, \end{aligned}$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$x' = 1$$

$$\int 0 dx = C$$

$$C' = 0$$

gde smo koristili tablične integrale $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ i $\int dx = x + C$.

$$(b) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$$

Rešenje:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C.$$

$$(c) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \int \left(\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

Rešenje: Dati integral svodimo na zbir dva tablična na sledeći način

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{x^2 \pm 1}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x - \arctg x + C. \end{aligned}$$

$$\int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctg x + C$$

PRIMER. $\int \sqrt{2x+1} dx = \int \sqrt{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$
 $d / 2x+1 = t$
 $(2x+1)' dx = (t)' dt$
 $2 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$
 $= \frac{1}{3} \cdot t \cdot \sqrt{t} + C =$
 $= \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C$

1.6.2 Smena promenljivih

1. Rešiti sledeće integrale:

(a) $\int \frac{dx}{1-2x}$

Rešenje: Dati integral svodimo na tablični uvođenjem smene $1-2x = t$. Koristeći smenu izražavamo dx preko dt , na sledeći način

$$d(1-2x) = dt \Rightarrow -2dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{2}$$

Sada vredi

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \frac{-\frac{dt}{2}}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |1-2x| + C,$$

gde poslednju jednakost dobijamo vraćanjem smene.

(b) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}} dx$ (c) $\int \sin(3x+2) dx = \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} =$

Rešenje: Uvodimo smenu $3x+2 = t$
 $3 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin t dt$
 $2 + \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \Rightarrow \sin x dx = -dt.$

Sada imamo

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}} dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{2+\cos x} + C.$$

1.6.3 Parcijalna integracija

1. Rešiti sledeće integrale:

(a) $\int x e^x dx$

PRIMER: $\int \ln x dx =$
 $\boxed{t = \ln x} \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$
 $x = e^t$
 $dx = x dt$
 $dx = e^t dt$

$\int t \cdot e^t dt = ?$

Rešenje: Primenjujemo metodu parcijalne inetgracije $\int u dv = uv - \int v du$, i to za

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx &\Rightarrow v = \int e^x dx = e^x, \end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

(b) $\int \ln x dx.$

Rešenje: Primenjujemo parcijalnu integraciju sa

$$\begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx &\Rightarrow v = \int dx = x, \end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

(c) $\int (x^2+1) e^x dx = e^x (x^2+1) - \int 2x e^x dx = e^x (x^2+1) - 2 \int x e^x dx =$

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1 & dv &= e^x dx \\ du &= (x^2+1)' dx = 2x dx & v &= \int e^x dx = e^x \end{aligned}$$

$= e^x (x^2+1) - 2 (x e^x - \int e^x dx) = e^x (x^2+1) - 2 (x e^x - e^x) + C$