Univerzitet u Novom Sadu

Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.Z106)
STUDIJSKI PROGRAM: GT, ZR, ZU

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Integracija racionalnih funkcija, integracija nekih iracionalnih funkcija.

Radna nedelja br. 2

Prof. dr Tibor Lukić

$f(x)\ ,\ x\in[a,b]$

$$\int f(x)\,dx \overset{def}{=} F(x)+C \quad , F'(x)=f(x)\ ,\ x\in[a,b]$$

$$\int f(x) = ?$$

(Z1) $\int (x^2+\sin x)\,dx = \int x^2\,dx + \int \sin x\,dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + C$

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

(Z2) $\int \sqrt{5x-1}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \sqrt{t}\,dt =$

d/ $5x-1=t$

$5\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{5}$

$= \frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{5}\,\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{5}\,\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{15}\sqrt{t^3} + C$

$= \frac{2}{15}\,t\cdot\sqrt{t} = \frac{2}{15}\cdot(5x-1)\sqrt{5x-1} + C$

Primer. a) $R(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3-3x^2+5} = \frac{P_2(x)}{Q_3(x)}$ b) $R(x) = \frac{x+1}{-7x^5+9}$

$7 : 3 = 2$ $\quad 7 = 2 \cdot 3 + 1$

$=1$

0.1 Integracija racionalnih funkcija

$P_n : Q_m = K(x)$

$R(x)$

Racionalna funkcija je količnik dva polinoma

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog i m-tog stepena, respektivno. Ako je $n < m$, onda je $R(x)$ **prava racionalna funkcija**. U suprotnom, kada je $n \geq m$, $R(x)$ je **neprava racionalna funkcija**. Međutim, na osnovu teoreme o deljenju dva ne-nula polinoma, imamo da svaku nepravu racionalnu funkciju, posle deljenja polinoma $P_n(x)$ polinomom $Q_m(x)$, možemo svesti na zbir polinoma količnika $S_{n-m}(x)$ i prave racionalne funkcije $\frac{T_l(x)}{Q_m(x)}$, odnosno

$Q_m :$

$P_n = Q_m K(x) + R(x)$

$\Downarrow$

$\frac{P_n}{Q_m} = K(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$

$$R(x) = S_{n-m}(x) + \frac{T_l(x)}{Q_m(x)},$$

PRAVA RAC.

gde je $l < m$. Otuda integral neprave racionalne funkcije $R(x)$ dobija oblik

$$\int R(x)\,dx = \int S_{n-m}(x)\,dx + \int \frac{T_l(x)}{Q_m(x)}\,dx.$$

gde je $p < n$. S obzirom da se integracija polinoma $S_{n-m}(x)$ izvodi direktno (koristeći osobine 3 i 4 neodređenog integrala), ostaje nam još samo da pokažemo kako se vrši integracija prave racionalne funkcije. S tim u vezi, znamo da svaka prava racionalna funkcija može predstaviti u obliku zbira **parcijalnih ili prostih razlomaka**, tj. racionalnih funkcija oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \ \text{ i } \ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

gde su $A, B, C, a, p, q \in \mathbb{R},\ k, m \in \mathbb{N}$ i $p^2 - 4q < 0$. Iz ovog sledi da problem integracije prave racionalne funkcije se može svesti na integraciju odgovarajućih parcijalnih razlomaka. U nastavku ćemo pokazati da je integracija svih tipova parcijalnih razlomaka moguća, odnosno da je moguće odrediti intergal svake racionalne funkcije.

PRAVA RAC. FUNK.

1^0 Intgeral oblika

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx,$$

$x - a = t$

RASTAVLJANJE NA PARCIJALNE RAZLOMKE

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^l (x^2+px+q)^k} = \int \frac{A_1}{x-a} + \int \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \int \frac{A_l}{(x-a)^l} + \int \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} +$$

$$+\int \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \int \frac{B_k x + C_k}{(x^2+px+q)^k}, \quad l, k \in \mathbb{N}$$

x^2+px+q NEMA REALNIH NULA $\Leftrightarrow$ $D_1 = p^2 - 4q < 0$

rešavamo smenom $x - a = t$. Tada je $dx = dt$, a za integral dobijamo

$$I = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| + C = A\ln|x-a| + C, \quad \text{za} \quad x \neq a.$$

2^0 Integral oblika

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx, \quad \text{gde je} \quad k \geq 2,$$

se rešava smenom $x - a = t$, odnosno $dx = dt$. Tada imamo

$$I = A\int \frac{dt}{t^k} = A\int t^{-k}\,dt = A\frac{t^{-k+1}}{1-k} + C$$

$$= -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, \quad \text{gde je} \quad x \neq a.$$

3^0 Ovaj tip integrala ima sledeći opšti oblik

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2+px+q)^m}\,dx, \quad p^2 - 4q < 0, \; m \in \mathbb{N},$$

gde uslov $p^2 - 4q < 0$ implicira da se u imeniocu podintegralne funkcije nalazi kvadratni trinom $x^2 + px + q$ koji nema realnih nula, odnosno ne može da se rastavi na proizvod linearnih faktora. Ovaj kvadratni trinom uvek možemo napisati u kanoničkom obliku

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + 2p\frac{x}{2} + \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

$$> 0 \qquad = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

gde je $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$. Koristeći ovu činjenicu, opšti oblik integrala možemo napisati u obliku

$$p^2 - 4q < 0 \quad /:4$$

$$\frac{p^2}{4} - q < 0 \quad /\cdot(-1)$$

$$q - \frac{p^2}{4} > 0$$

$$\int \frac{Bx + C}{\left((x+\frac{p}{2})^2 + \underbrace{(q - \frac{p^2}{4})}_{D}\right)^m}\,dx$$

odakle uvođenjem nove promenljive $t = x + \frac{p}{2}$ imamo:

$$\int \frac{Bt - \frac{Bp}{2} + C}{\left(t^2 + D\right)^m}\,dt = B\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+D\right)^m} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+D\right)^m}}_{I_m}. \quad (1)$$

SMENA

$t^2 + D = z$

$2t\,dt = dz \rightarrow t\,dt = \dfrac{dz}{2}$

$D > 0 \Rightarrow D = \alpha^2$

$\alpha = \sqrt{D}$

$\int \frac{t\,dt}{(t^2+D)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^m} = \ldots$

$\int \frac{dt}{(t^2+D)^m} \quad (m=1) \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2+D} = \int \frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha} + c$

Prvi integral se rešava smenom $z = t^2 + D$, dok kod drugog integrala I_m mogu nastupiti dva slučaja:

a) za $m = 1$, integral I_m se svodi na tablični integral $I_1 = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{D}}$ jer je $D > 0$ (zbog uslova $p^2 - 4q < 0$);

b) za $m \geq 2$ primenjujemo parcijalnu integraciju

$$u = \frac{1}{(t^2+D)^m} \quad \Rightarrow du = \frac{-m(t^2+D)^{m-1} \cdot 2t\,dt}{(t^2+D)^{2m}} = -2m\frac{t}{(t^2+D)^{m+1}}\cdot dt$$
$$dv = dt \quad \Rightarrow v = t,$$

odakle imamo

$$\begin{aligned} I_m = \int \frac{dt}{\left(t^2+D\right)^m} &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2m \int \frac{t^2}{\left(t^2+D\right)^{m+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2m \int \frac{t^2+D-D}{\left(t^2+D\right)^{m+1}}\,dt \\ &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2m \int \frac{t^2+D}{\left(t^2+D\right)^{m+1}}\,dt - 2mD \int \frac{dt}{\left(t^2+D\right)^{m+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2m \int \frac{dt}{\left(t^2+D\right)^{m}} - 2mD \int \frac{dt}{\left(t^2+D\right)^{m+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2mI_m - 2mDI_{m+1}. \end{aligned}$$

Rešavanjem poslednje rekurentne veze po I_{m+1} dobijamo

$$I_{m+1} = \frac{t}{2mD(t^2+D)^m} + \frac{2m-1}{2mD}I_m,$$

odnosno nakon smanjivanja indeksa m za 1 sledeću rekurentnu formulu:

$$I_m = \frac{t}{2(m-1)D(t^2+D)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)D}I_{m-1}.$$

ZAKLJUČAK

· INTEGRAL SVAKE RAC. FUNKCIJE JE MOGUĆE ODREDITI!

0.2 Integracija iracionalne funckcije

U ovom delu ćemo posmatrati integraciju funkcija kod kojih se nepoznata promenljiva nalazi pod znakom nekog korena, odnosno argument je iracionalne funkcije. Određene tipove integrala iracionalnih funkcija možemo rešiti

IRACIONALNA FUNKCIJA $= \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$
- $\sqrt[5]{(x-3)^3} = (x-3)^{3/5} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{3}{5}$

$p = 3$

$q = 5$

svođenjem odgovarajućom smenom na integrale racionalnih funkcija ili direktno na tablične integrale. U nastavku ćemo obraditi upravo nekoliko takvih oblika integrala iracionalnih funkcija.

1^0 Integral oblika

$$\int \mathcal{R}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_m}\right) dx,$$

gde su $\mathcal{R}$ racionalna funkcija više promenljivih,

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1}, \ldots, r_m = \frac{p_m}{q_m} \in \mathbb{Q}$$

i $ad-bc \neq 0$. Ako je p *najmanji zajednički sadržalac* brojeva $q_1, q_2, \ldots, q_m$, tada se integral smenom

$$t^p = \frac{ax+b}{cx+d},$$

$p = \text{NZS}\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$

odnosno

$$x = \frac{dt^p - b}{a - ct^p} = f(t), \;\; dx = f'(t)dt.$$

svodi na integral racionalne funkcije

$$\int \mathcal{R}\left(f(t), t^{pr_1}, \ldots, t^{pr_m}\right) f'(t)dt = \int \mathcal{R}_1(t)dt,$$

gde su sada vrednosti pr_i, $i = 1, 2, .., m$ celi brojevi, a to znači da je dobijena podintegralna funkcija, označena sa $\mathcal{R}_1(t)$, racionalna po promenljivoj t.

2^0 Integral oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \tag{2}$$

gde je P_n polinom n-tog stepena po x ima poznat oblik primitivne funkcije u kojoj se nalaze neodređeni koeficijenti koje treba izračunati. Naime, odgovarajuća primitivna funkcija je oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3}$$

UVEK SE SVODI NA TABLIČNI INT.

$Q_{n-1}(x) = A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$

gde je λ neodređeni koeficijent, a $Q_{n-1}(x)$ polinom sa neodređenim koeficijentima stepena $(n-1)$. Diferenciranjem, iz prethodnog identiteta, dobijamo

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$
$$+\lambda\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad / \cdot 2\sqrt{ax^2+bx+c}$$

odnosno množenjem jednakosti sa $2\sqrt{ax^2+bx+c}$, imamo

$$2P_n(x) = 2Q'_{n-1}(x)\cdot(ax^2+bx+c) + (2ax+b) + 2\lambda.$$

Dalje, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene polinoma na levoj i desnoj strani određujemo vrednost za λ i nedređene koeficijente polinoma $Q_{n-1}(x)$. Odavde, zamenom dobijenih koeficijenata u identitet (3) i svođenjem integrala $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ pogodnim smenama na odgovarajući tablični integral, početni integral (2) je u potpunosti određen.

3^0 Integral oblika

$$\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

transformacijom $P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c} = \dfrac{P_n(x)(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se svodi na integral oblika

$$\int \frac{Q_{n+2}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

koji se rešava na način opisan za integral oblika 2^0.

4^0 Integral oblika

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad n\in\mathbb{N},$$

se smenom $x-\alpha = \dfrac{1}{t}$, odnosno $x = \dfrac{1}{t}+\alpha$ i $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, svodi se na integral

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t^n} \cdot \sqrt{\dfrac{dt^2+et+a}{t^2}}}$$

$$= -\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{dt^2+et+a}},$$

što je ponovo poznati integral oblika 2^0, gde su korišćene oznake $d = a\alpha^2 + b\alpha + c$ i $e = 2a\alpha + b$.

0.3 Primeri

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}, \quad A,B=?$$

0.3.1 Integral racionalne funkcije

1. Rešiti sledeće integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-4)}\,dx$

$x^2-4=(x-2)(x+2)$

Rešenje: Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija i možemo je integraliti metodom neodređenih koeficijenata. Najpre polinom u imeniocu ove funkcije rastavljamo na proste činioce, $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Stoga, traženi integral možemo zapisati kao $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\,dx$. Racionalnu funkciju dalje rastavljamo na zbir parcijalnih razlomaka

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2},$$

$/(x-2)(x+2)$

gde su A i B koeficijenti koje određujemo. Množeći poslednju jednakost sa $(x-2)(x+2)$ dobijamo

$$\begin{aligned} 1 &= A(x+2) + B(x-2) \\ 1 &= x(A+B) + 2A - 2B \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata koji stoje uz x i x^0 na levoj i desnoj strani dobijamo sistem

$$\begin{array}{llll} x: & A + B = 0 & \Rightarrow B = -A, & B = -\frac{1}{4} \\ & 2A - 2B = 1 & \Rightarrow 2A + 2A = 1, & A = \frac{1}{4} \end{array}$$

PRIMER 2 REŠITI NEODREĐENI INTEGRAL $I=\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$. 3

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+x+\frac{1}{4}$$

$$I = \int \frac{x\cdot dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}} = (*)$$

$$\boxed{x+\frac{1}{2}=t} \to x = t-\frac{1}{2}$$

$$dx = dt$$

$$(*) = \int \frac{t\cdot dt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$$t^2+\frac{3}{4} = z$$

$$2t\,dt = dz$$

$$t\,dt = \frac{1}{2}dz$$

$$z = x^2+x+1$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\to \frac{1}{2}\ln z - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Prema tome, dobili smo $\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$.

Sada možemo rešiti dati integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2} \\
&= \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C
\end{aligned}$$

10

(b) $I = \int \frac{x^5+x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ = NIJE PRAVA RAC FUNK!

Rešenje: U pitanju je integracija neprave racionalne funkcije (stepen polinoma u brojiocu je veći od stepena polinoma u imeniocu) te je prvo potrebno podeliti polinom x^5+x^3+1 polinomom $x^2(x^2+1) = x^4+x^2$. Deljenjem dobijamo količnik x i ostatak 1, te početni integral možemo zapisati kao

$$x^5+x^3+1 : (x^4+x^2) = x$$
$$-x^5-x^3$$
$$1 = R$$

$$I = \int \left(\underbrace{x}_{Q} + \underbrace{\frac{1}{x^2(x^2+1)}}_{=R}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$$

Sada se zadatak svodi na rešavanje integrala prave racionalne funckije $\frac{1}{x^2(x^2+1)}$. Imenilac ove funckije je faktorisan na proste činioce (x^2+1 je nesvodljiv u skupu $\mathbb{R}$), pa funkciju predstavljamo kao zbir parcijalnih razlomaka na sledeći način:

PRAVA RAC. FUNK.

$$\begin{aligned}
\to \frac{1}{x^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \qquad / \cdot x^2(x^2+1) \\
1 &= Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \\
1 &= x^3(A+C) + x^2(B+D) + xA + B
\end{aligned}$$

SISTEM

$B = 1$

$A = 0$

$B + D = 0$

$A + C = 0$

$(\Leftarrow)$

Izjednačavanjem koeficijenata uz stepene promenljive x dobijamo

$\boxed{B=1}$, $\boxed{A=0}$, $A+C=0 \Rightarrow \boxed{C=0}$, $B+D=0 \Rightarrow \boxed{D=-1}$.

$B = 1$

$A = 0$

$C = 0$

$D = -1$

$$\frac{x^2+7x-1}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad | \; A, B, C = ?$$

$(\Leftarrow)$

PRIMER.

$$\int \frac{x^2+7x-1}{(x+3)(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{x^2+x+1+6x-2}{(x+3)(x^2+x+1)}\,dx =$$

$= R(x)$ PRAVA RAC. FUNK

$x^2+x+1=0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{1}\notin \mathbb{R}$

$$= \int \frac{\cancel{x^2+x+1}}{(x+3)\cancel{(x^2+x+1)}}\,dx + \int \frac{6x-2}{(x+3)(\quad)}\,dx$$

$p^2-4q=-3$

x^2+px+q

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$$

$$= \int \frac{dx}{x+3} + 2\cdot\underbrace{\int \frac{3x-1}{(x+3)(x^2+x+1)}\,dx}_{I}$$

Vraćanjem u početni integral dobijamo

$$\int \frac{x^5+x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$$

NAPOMENA: Postupak rastavljanja racionalne funkcije $\frac{1}{x^2(x^2+1)}$ na zbir parcijalnih razlomaka smo mogli skratiti uočavajući da je

$$I = \int \frac{3x\,dx}{(x+3)(x^2+x+1)} + \int \frac{dx}{(x+3)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{1+x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x^2(x^2+1)} - \frac{x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

0.3.2 Integracija nekih tipova iracionalnih funkcija

1. Rešiti sledeće integrale:

$x+1=\frac{ax+b}{cx+d}$

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)-\sqrt{x+1}}\,dx$ 1°

$x+1=t^p$, $p=NZS\{2,1\}=2$

$x+1=t^2$

Rešenje: Traženi integral možemo zapisati kao $\displaystyle\int \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}+2}{(x+1)^1-(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx$. Pojavljuju se $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ i $(x+1)^1$ (imenioci eksponenata su 2 i 1), pa je $p = NZS\{2,1\} = 2$. Stoga, za rešavanje ovog integrala koristimo smenu $x+1=t^2$, odakle imamo

$$\begin{aligned} x &= t^2-1 \\ dx &= 2t\,dt \end{aligned}$$

Dalje, početni integral zapisujemo i rešavamo na sledeći način

$$\int \frac{(t^2)^{\frac{1}{2}} + 2}{(t^2)^1 - (t^2)^{\frac{1}{2}}}\, 2t\ dt = 2 \cdot \int \frac{t+2}{t^2 - t}\, t\ dt$$

INT. RAC. FUNKCIJE!

$$= 2 \cdot \int \frac{t+2}{\cancel{t}(t-1)}\ \cancel{t}\ dt = 2 \cdot \int \frac{t-1+3}{t-1}\ dt$$

$$= 2 \cdot \int dt + 6 \cdot \int \frac{dt}{t-1} = 2 \cdot t + 6 \cdot \ln|t-1| + C$$

$$= 2 \cdot \sqrt{x+1} + 6 \cdot \ln|\sqrt{x+1} - 1| + C.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ SMENA $\boxed{x = t^6}$ $\cdot\ p = NZS\{2,3\} = 6$

Rešenje: Dati integral možemo zapisati kao $\displaystyle\int \frac{dx}{(x)^{\frac{1}{2}} + (x)^{\frac{1}{3}}}$, odakle nalazimo da je $p = NZS\{2,3\} = 6$. Smena koju uvodimo je $x = t^6$, pa imamo da je $dx = 6 \cdot t^5\ dt$. Dalje rešavamo na sledeći način

INT. RAC. FUNK.

$$\int \frac{6 \cdot t^5\ dt}{(t^6)^{\frac{1}{2}} + (t^6)^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot \int \frac{t^5\ dt}{t^3 + t^2} = 6 \cdot \int \frac{t^{\cancel{5}}\ dt}{\cancel{t}^2(t+1)}$$

$$= 6 \cdot \int \frac{t^3 \pm 1}{t+1}\ dt = 6 \cdot \int \frac{t^3+1}{t+1}\ dt - 6 \cdot \int \frac{dt}{t+1}$$

$$= 6 \cdot \int \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)}{t+1}\ dt - 6 \cdot \int \frac{dt}{t+1}$$

$$= 6 \cdot \frac{t^3}{3} - 6 \cdot \frac{t^2}{2} + 6t - 6 \cdot \ln|t+1|$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \cdot \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.$$

3. Rešiti integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 5x + 1}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$

Rešenje: U brojiocu podintegralne funkcije imamo polinom po x drugog stepena, stoga je u našem slučaju polinom $Q(x)$ prvog stepena, odnosno $ax+b$.

$$\int \frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = (ax+b)\sqrt{x^2+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

Da bismo odredili koeficijente a, b i λ izjednačavamo izvode leve i desne strane ove jednakosti.

$$\frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+1}} = a\cdot\sqrt{x^2+1} + (ax+b)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} + \lambda\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Pomnožićemo jednakost sa $\sqrt{x^2+1}$, čime dobijamo

$$4x^2+5x+1 = a\cdot(x^2+1) + (ax+b)\cdot x + \lambda$$

$$4x^2+5x+1 = x^2(a+a) + xb + a + \lambda$$

Izjednačavanjem koeficijenta uz odgovarajuće stepene promenljive x dobijamo

$$2a = 4 \to a = 2; \qquad b = 5; \qquad a+\lambda = 1 \to \lambda = -1$$

Odredili smo nepoznate koeficijente, pa početni integral možemo zapisati

$$\int \frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = (2x+5)\sqrt{x^2+1} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= (2x+5)\sqrt{x^2+1} - \ln|\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2+1}| + \mathrm{C}$$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$

Rešenje: Primetimo prvo da dati integral možemo zapisati kao

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

Na ovaj integral primenimo gore objašnjeni postupak.

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = (ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad / \frac{d}{dx}$$

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = a\sqrt{x^2+x+1} + (ax+b)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Množimo obe strane jednakosti sa $2\sqrt{x^2+x+1}$ i dobijamo

$$2(x^2+x+1) = 2a(x^2+x+1) + (ax+b)(2x+1) + 2\lambda$$

$$2x^2+2x+2 = x^2(2a+2a) + x(2a+a+2b) + 2a+b+2\lambda$$

$$4a = 2 \to a = \frac{1}{2}; \qquad 3a+2b = 2 \to b = \frac{1}{4}; \qquad 2a+b+2\lambda = 2 \to \lambda = \frac{3}{8}$$

Sada je

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = (*)$$

Uvođenjem smene $x+\frac{1}{2} = t$, $dx = dt$, poslednji integral se svodi na $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}$, koji je tablični i iznosi $\ln|\mathrm{t} + \sqrt{\mathrm{t}^2+\frac{3}{4}}|$. Dobijamo da je

$$(*) = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\,\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

Beleške