



Univerzitet u Novom Sadu  
Fakultet tehničkih nauka



PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.Z106)  
STUDIJSKI PROGRAM: GT, ZR, ZU

## BELEŠKE SA PREDAVANJA

Integracija trigonometrijskih funkcija

Radna nedelja br. 3

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

$$\bullet \int f(x) dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x)$$

$$\bullet \int R(x) dx = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \text{uvek noženo da rešimo.}$$

$$\bullet \int \frac{\sqrt{x} + {}^2\sqrt{x}}{2 + 3\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sqrt{t^6} + {}^3\sqrt{t^6}}{2 + 3\sqrt{t^6}} \cdot 6 t^5 dt =$$

$$\text{SMENA: } t^6 = x, \quad t = \text{NZS}\{3, 2\} = 6 \\ 6t^5 dt = dx$$

$$= \int \frac{t^3 + t^2}{2 + 3t^3} \cdot 6 \cdot t^5 dt = \dots$$

INT. PAR. FUNKCIJE

$$\bullet \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\int \frac{\overbrace{x+1}^{P_1(x), m=1}}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = Q_0(x) \sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= A \sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$A, \lambda = ?$$

3

## 0.1 Integracija trigonometrijskih funkcija

Ovaj odeljak razmatra rešavanje nekoliko tipova integrala kod kojih podintegralna funkcija sadrži trigonometrijske funkcije.

$$\int \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{1 + \cos x} dx$$

1<sup>o</sup> Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx,$$

gde je podintegralna funkcija racionalna funkcija od  $\sin x$  i  $\cos x$ , može se rešiti primenom **opšte trigonometrijske smene**

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Za ovu smenu važi da je

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \implies dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

a funkcije  $\sin x$  i  $\cos x$  možemo izraziti preko nove promenljive  $t$  na sledeći način

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{i} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Koristeći predloženu smenu i gore izvedene formule, integral tipa 1<sup>o</sup> se svodi na integral racionalne funkcije

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int \mathcal{R}_1(t) dt.$$

2<sup>o</sup> Integrali oblika

$$\int \mathcal{R}(\sin x) \cos x dx \quad \text{i} \quad \int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx$$

smenama

$t = \sin x \implies dt = \cos x dx$ , odnosno  $t = \cos x \implies dt = -\sin x dx$ , respektivno,

mogü svesti na integrale racionalnih funkcija po novoj promenljivoj  $t$ .

3<sup>0</sup> Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{tg} x) dx$$

↖️ *PARMEN*

$$\int \frac{t^2 + 3}{1 - t} dx$$

se smenom

$$t = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

može svesti na integral racionalne funkcije po promenljivoj  $t$ . Diferenciranjem jednačine veze dobijamo

$$\boxed{dt = \frac{dx}{\cos^2 x}}$$

↙

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Međutim, često se koristi i veza bazirana na inverznoj funkciji

$$x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow \boxed{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

$$\int \frac{t^2 + 3}{1-t} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

4<sup>0</sup> Integrali oblika

$$\int P_n(x) \cos \beta x dx \quad \text{i} \quad \int P_n(x) \sin \beta x dx,$$

$$= \int \frac{t^2 + 3}{1-t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

*R(k)*  
*INT. RAC. FUNK.*

gde su  $P_n(x)$  polinom  $n$ -tog stepena i  $\beta \in \mathbb{R}$ , rešavaju se uzastopnom primenom parcijalne integracije, koja se nastavlja  $n$  puta. U svakom koraku za funkciju  $u$  se bira polinom, jer se na taj način stepen polinoma u novom integralu smanjuje za jedan. Šematski prikaz  $i$ -te parcijalne integracije možemo zapisati na sledeći način

$$u = P_{n-i}(x) \quad \Rightarrow \quad du = P_{(n-i)-1}(x) dx$$

$$dv = \cos \beta x dx \quad (\sin \beta x dx) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \quad \left( -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \right),$$

a  $i$  će uzimati vrednosti od nule do  $n - 1$ . U poslednjem koraku, kada je  $i = n - 1$ , polinom će biti nultog stepena, odnosno konstanta, što znači da prilikom poslednje parcijalne integracije dolazimo do integrala tipa

$$\int \sin \beta x dx \quad \text{ili} \quad \int \cos \beta x dx,$$

koji se lako mogu rešiti.

PRIMER. *REŠITI INT.*  $\int (x^2 + 1) \cos 2x dx = (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int x \cdot \sin 2x dx =$

$$u = x^2 + 1 \quad dv = \cos 2x dx$$

$$du = 2x dx \quad v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 1) \sin 2x - \int x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \sin 2x - \left[ -\frac{1}{2} x \cos 2x \right.$$

$$u = x \quad dv = \sin 2x dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \right] = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$= \left( \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \right) \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x + C$$

## 0.2 Integracija izraza sa eksponencijalnom funkcijom

Važna osobina eksponencijalne funkcije  $e^x$  jeste da njen oblik ostaje nepromenjen pod dejstvom operatora izvoda ili neodređenog integrala. Ove činjenice se koriste u rešavanju integrala sa eksponencijalnom funkcijom.

1<sup>o</sup> Integral oblika

smenom

se svodi na integral racionalne funkcije.

2<sup>o</sup> Integral oblika

$$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

gde je  $P_n(x)$  polinom  $n$ -tog stepena, rešava se uzastopnom primenom parcijalne integracije, koja se nastavlja  $n$  puta. U svakom koraku za funkciju  $u$  se bira polinom, jer se na taj način stepen polinoma u novom integralu smanjuje za jedan. Šematski prikaz  $i$ -te parcijalne integracije možemo zapisati na sledeći način

$$u = P_{n-i}(x) \implies du = P_{(n-i)-1}(x) dx$$

$$dv = e^{\alpha x} dx \implies v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x},$$

gde će  $i$  uzimati vrednosti od nule do  $n - 1$ . U poslednjem koraku, kada je  $i = n - 1$ , polinom će biti nultog stepena, odnosno konstanta, što znači da prilikom poslednje parcijalne integracije dolazimo do integrala tipa

$$\int e^{\alpha x} dx$$

koji se lako rešava.

PRIMER REŠEN INTEGRAL

$$\int \frac{e^x}{4 + e^{2x}} dx = \int \frac{t}{4 + t^2} \cdot \frac{dt}{t} =$$

$$t = e^x \implies dx = \frac{dt}{t},$$

$$\text{SMENA: } e^x = t \implies e^x dx = dt$$

$$t dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

$$= \int \frac{dt}{4 + t^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \arctg \frac{e^x}{2} + C$$

3<sup>o</sup> Integrali oblika

|| || svodjenje na isti oblik

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx \text{ i } \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

rešavaju se primenom parcijalne integracije, uzastopno dva puta. Pokažaćemo to na primeru prvog integrala, drugi se rešava analogno. Ako u formuli za prvu parcijalnu integraciju za  $u$  biramo tako da bude  $u = e^{\alpha x}$ , dobijamo

$$I = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

U drugoj parcijalnoj integraciji, ako za  $u$  ponovo biramo tako da bude  $u = e^{\alpha x}$ , dobićemo

$$I = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \left[ \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx \right],$$

gde je integral u uglastoj zagradi identičan sa polaznim integralom. To nam omogućava da traženi integral  $I$  odredimo kao rešenje jednačine

$$I = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \left[ \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} I \right],$$

što nam na kraju daje traženu primitivnu funkciju

$$I = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} \left( \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta x - \cos \beta x \right).$$

## 0.3 Primeri

### 0.3.1 Integracija trigonometrijskih funkcija

1. Rešiti sledeće integrale:

$$\rightarrow \text{(a)} \int \frac{dx}{2 + \cos x} \quad \mathcal{R}(\sin x, \cos x) = \frac{1}{2 + \cos x}$$

**Rešenje:** Posmatrani integral je oblika  $\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)$  pa za njegovo

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

7

rešavanje koristimo sledeću smenu:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$$

$$\Rightarrow x = 2 \cdot \operatorname{arctg} t$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

što zajedno sa  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  daje:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \cdot \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 3} \\ &= 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$a = \sqrt{3}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

2. Rešiti sledeće integrale:

$$\rightarrow \text{(a)} \int (1 + \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg} x dx = \int (1 + \sin^2 x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1 + \sin^2 x}{\sin x} \cdot \cos x dx$$

**Rešenje:** Koristeći relaciju  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  posmatrani integral postaje:

$\mathcal{R}(\sin x)$  20

$\sin x = t$   
 $\cos x dx = dt$

$$\int (1 + \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg} x dx$$

$$= \int (1 + \sin^2 x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1 + \sin^2 x}{\sin x} \cdot \cos x dx.$$

S obzirom da je poslednji integral oblika  $\int \mathcal{R}(\sin x) \cdot \cos x dx$ , za njegovo rešavanje koristimo smenu  $t = \sin x$ , odnosno  $dt = \cos x dx$ :

$$\int \frac{1+t^2}{t} dt = \int \frac{dt}{t} + \int t dt$$

$$= \ln |t| + \frac{t^2}{2} + C = \ln |\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

$$\int \frac{\sin x + 1}{2 - \sin x} \cdot \cos x \, dx = \int \mathcal{R}(\sin x) \cdot \cos x \, dx = \int \frac{t + 1}{2 - t} \cdot dt =$$

smena:  $\boxed{\sin x = t} \Rightarrow \cos x \, dx = dt$

$$= - \int \frac{t + 1}{t - 2} \, dt = - \int \frac{t - 2 + 2 + 1}{t - 2} \, dt = - \int \frac{t - 2}{t - 2} \, dt - 3 \int \frac{dt}{t - 2}$$

$$\rightarrow (b) \int \sin x \cos x \, dx = - \int dt - 3 \int \frac{dt}{t - 2} = -t - 3 \cdot \ln |t - 2| + C =$$

$$= -\sin x - 3 \cdot \ln |\sin x - 2| + C$$

**Rešenje:** Ovaj integral se može posmatrati i kao  $\int \mathcal{R}(\sin x) \cdot \cos x \, dx$  ali i oblika  $\int \mathcal{R}(\cos x) \cdot \sin x \, dx$ . Ovde ćemo do rešenja doći posmatrajući ga kao  $\int \mathcal{R}(\sin x) \cdot \cos x \, dx$ , odnosno smenom  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

dok slučaj da se dati integral posmatra u obliku  $\int \mathcal{R}(\cos x) \cdot \sin x \, dx$  ostavljamo čitaocu za vežbu.

$$\rightarrow (c) \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} \, dx. \quad \begin{matrix} \text{/: } \cos x \\ \text{/: } \cos x \end{matrix}$$

**Rešenje:**

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} \, dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + 2} \, dx = \int \frac{\text{tg } x - 1}{\text{tg } x + 2} \, dx. \quad (1)$$

Kako je poslednji integral oblika  $\int \mathcal{R}(\text{tg } x) \, dx$ , za njegovo rešavanje koristimo smenu  $t = \text{tg } x \Rightarrow x = \text{arctg } t$ , odnosno  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ :

$$\int \frac{t - 1}{t + 2} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \int \frac{t - 1}{(t + 2)(1 + t^2)} \, dt.$$

INT. RAC. FUNK.

S obzirom da je ovo integral prave racionalne funkcije koju prethodno predstavljamo u obliku zbira parcijalnih razlomaka na sledeći način:

$$\int \frac{t - 1}{(t + 2)(1 + t^2)} = \frac{A}{t + 2} + \frac{Bt + C}{1 + t^2} = \frac{-\frac{3}{5}}{t + 2} + \frac{\frac{3}{5}t - \frac{1}{5}}{1 + t^2}$$

$$= \int \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{t + 2} + \int \frac{3}{5} \cdot \frac{t}{1 + t^2} - \int \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 + t^2}$$

tada poslednji integral zapisujemo kao:

$$\int \frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} dt = -\frac{3}{5} \cdot \int \frac{dt}{t+2} + \frac{3}{5} \cdot \int \frac{t dt}{1+t^2} - \frac{1}{5} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{smene: } u = t+2, \quad v = t^2+1 \\ du = dt, \quad dv = 2t dt \\ t dt = \frac{1}{2} dv \end{array} \right] = -\frac{3}{5} \cdot \int \frac{du}{u} + \frac{3}{10} \cdot \int \frac{dv}{v} - \frac{1}{5} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2}$$

↙ TABLIČNI  
INT.

$$= -\frac{3}{5} \cdot \ln |u| + \frac{3}{10} \cdot \ln |v| - \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} t + c$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \ln |t+2| + \frac{3}{10} \cdot \ln |1+t^2| - \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} t + c$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \ln |\operatorname{tg} x + 2| + \frac{3}{10} \cdot \ln |1 + \operatorname{tg}^2 x| - \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x) + c \quad \underline{=}$$

### 0.3.2 Integracija proizvoda trigonometrijskih, eksponencijalnih i polinomnih funkcija

1. Rešiti integrale.

→ (a)  $\int (x+1) \cos 2x dx$ .  $\int_1^x$   $\int_0^1$

**Rešenje.** Dati integral je oblika  $\int P(x) \cos \alpha x dx$ , pa koristimo parcijalnu integraciju

$$\begin{aligned} u = x+1 &\Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 2x dx &\Rightarrow v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x, \end{aligned}$$

gde se integral kod  $v$  svodi na tablični uvođenjem smene  $2x = t$ , odakle je  $dx = \frac{dt}{2}$ . Primitimo da je za  $u$  uzet polinom, a ne trigonometrijska funkcija, jer je izvod polinoma polinom manjeg stepena. U ovom slučaju imamo

$$\begin{aligned} \int (x+1) \cos 2x dx &= \frac{1}{2}(x+1) \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2}(x+1) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

U poslednjem koraku kod računanja integrala ponovo smo koristili smenu  $2x = t$ .

$$\rightarrow \text{(b)} \int (x^2 + 1)e^{3x} dx. \quad \textcircled{2^{\circ}} \quad \int P_2(x) e^{3x} dx$$

**Rešenje.** Integral je oblika  $\int P(x)e^{\alpha x} dx$  i može se rešiti primenom parcijalne integracije. Za

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv &= e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}, \end{aligned}$$

gde se integral kod  $v$  izračunava uvođenjem smene  $3x = t$ , odakle je  $dx = \frac{dt}{3}$ . Sledi

$$\int (x^2 + 1)e^{3x} dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)e^{3x} - \frac{2}{3} \int xe^{3x} dx.$$

Da bismo rešili poslednji integral ponovo koristimo parcijalnu integraciju, i to

$$\begin{aligned} u &= x \Rightarrow du = dx \\ dv &= e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}, \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1)e^{3x} dx &= \frac{1}{3}(x^2 + 1)e^{3x} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) \\ &= \frac{1}{3}(x^2 + 1)e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C. \end{aligned}$$

Primitimo da je, slično kao i u prethodnom zadatku, kod obe primene parcijalne integracije za  $u$  biran polinom, a posledica je da se u oba koraka stepen polinoma pod integralom smanjivao.

$$\rightarrow \text{(c)} \int e^{2x} \sin 3x dx. \quad \textcircled{3^{\circ}}$$

**Rešenje.** Integrali oblika  $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$  se takođe rešavaju parcijalnom integracijom. Uzmimo

$$\begin{aligned} u &= e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ dv &= \sin 3x dx \Rightarrow v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x, \\ & \quad 3x = t \end{aligned}$$

gde, kao i u prethodnom primeru, kod rešavanja integrala kod  $v$  koristimo smenu  $3x = t$ . Dalje važi

$$\int e^{2x} \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x \, dx.$$

Koristeći ponovo parcijalnu integraciju sa

$$\begin{aligned} u = e^{2x} &\Rightarrow du = 2e^{2x} \, dx \\ dv = \cos 3x \, dx &\Rightarrow v = \int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \sin 3x, \end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x \, dx &= -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3}e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x \, dx \right) \\ &= -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x \, dx, \end{aligned}$$

gde se kao jedina nepoznata pojavljuje početni integral. Ako označimo sa  $I = \int e^{2x} \sin 3x \, dx$ , poslednja jednačina postaje

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9}I.$$

Rešavanjem jednačine po  $I$  dobijamo konačno rešenje

$$I = -\frac{3}{13}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x} \sin 3x + C.$$

Napomenimo da u ovom primeru kod dve primene parcijalne integracije nije bitno da li će se trigonometrijska ili eksponencijalna funkcija birati za  $u$ , ali jeste bitno da u oba koraka bude odabrana funkcija istog tipa. Ukoliko bismo, na primer, kod druge parcijalne integracije u našem rešenju uzeli  $u = \cos 3x$  i  $dv = e^{2x} \, dx$ , u sledećem koraku bismo dobili  $I = I$ , to jest, vratili bismo se na početak zadatka.

PRIMER

REŠITI INTEGRAL

$$\int \frac{1 + \cancel{t}g x}{\sin 2x} dx, \quad x \neq \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

reš.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x \cdot \cos x = 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x$$

$$\int \frac{1 + \cancel{t}g x}{2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} \cdot dx = \int \frac{1 + \cancel{t}g x}{2 + \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 + t}{2t} \cdot dt =$$

$$\text{SMENA: } \boxed{\operatorname{tg} x = t} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$$

INT. RAC. FUNK.  
PO  $t-u$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1+t}{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{t}{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t| + \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C =$$

$$= \ln \sqrt{|\operatorname{tg} x|} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$$

Beleške