Univerzitet u Novom Sadu

Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.Z106)

STUDIJSKI PROGRAM: GT, ZR, ZU

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Primena određenog integrala - izračunavanje površine ravnog lika, zapremine rotacionog tela i dužine luka krive.

Radna nedelja br. 5

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

0.1 Primena određenog integrala

Određeni integral ima široko polje primene koje obuhvata skoro sve oblasti nauke i tehnike. U nastavku ćemo se ograničiti samo na primene vezano za izračunavanje nekih geometrijskih veličina kao što su površina ravne figure, dužina luka krive, zapremina i površina obrtnog tela.

0.1.1 Izračunavanje površine ravnih figura

Posmatrajmo pozitivnu i neprekidnu funkciju $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Integralna suma određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ ima oblik

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i,$$

gde je $f(\xi_i)\triangle x_i$ opšti član ove sume. U geometrijskom smislu, izraz $f(\xi_i)\triangle x_i$ predstavlja površinu pravougaonika čije stranice su $f(\xi_i)$ i $\triangle x_i$, videti sliku 1. S predstavlja sumu površina svih pravougaonika nad intervalom $[a, b]$, što je aproksimacija površine **krivolinjskog trapeza** ograničenog krivom $y = f(x)$ i pravama $y = 0$, $x = a$ i $x = b$. U graničnom slučaju, kada $\max\triangle x_i \to 0$, S postaje tačna površina krivolinijskog trapeza P, odnosno imajući u vidu definiciju određenog integrala sledi

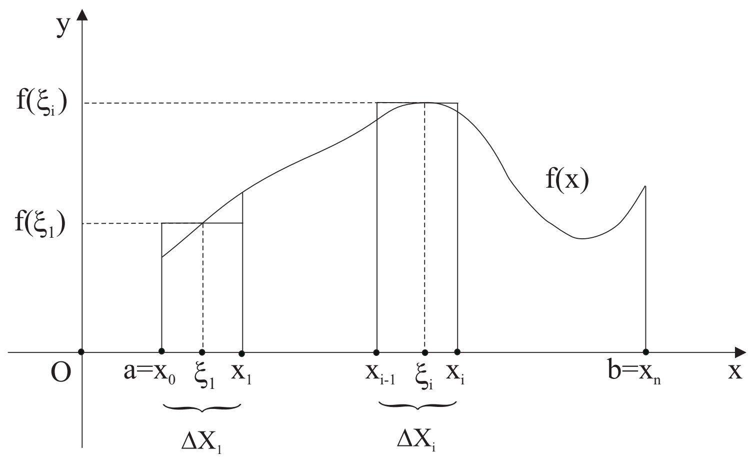
$$P = \lim_{\max\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ako za neprekidnu funkcju $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, c]$ i $f(x) \leq 0$ za $x \in [c, b]$, videti sliku 2 a), površina ograničena grafikom funkcije $y = f(x)$ i pravama $x = a$, $x = b$ i $y = 0$ se može izračunati kao

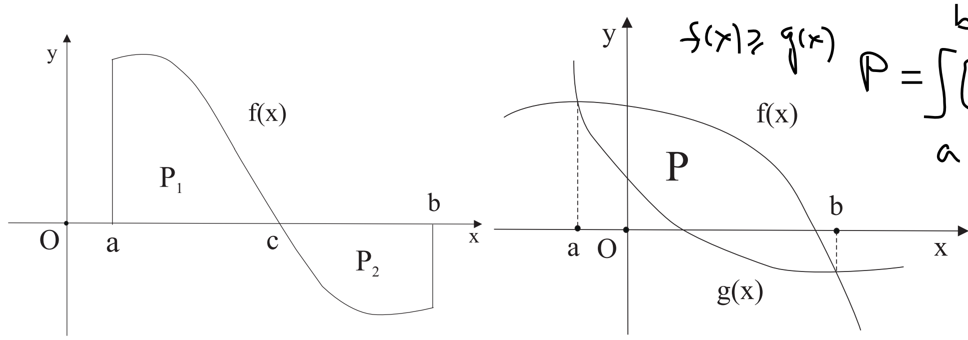
$$P = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

Neka su neprekidne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ takve da važi da je $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a, b]$. Površinu P ograničenu graficima funkcija $f(x)$ i $g(x)$, videti sliku 2 b), možemo da izračunamo na sledeći način

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



Slika 1: Krivolinijski trapez određen funkcijom $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$.



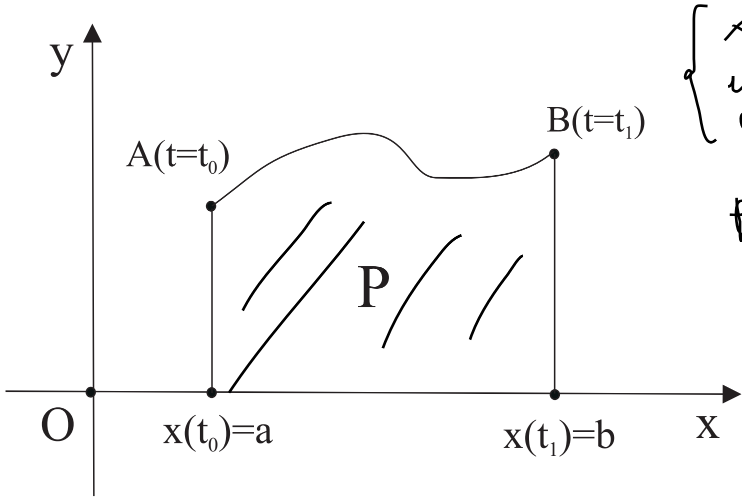
$f(x) \geq g(x)$ $\quad P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

a) b)

Slika 2: Različiti oblici i položaji ravnih figura.

Funkcija može biti zadata u **parametarskom obliku**. Pretpostavimo da je eksplicitno zadata funkcija $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ zadata i u parametarskom obliku pomoću funkcija $x = x(t)$ i $y = y(t)$ za $t_0 \leq t \leq t_1$. Neka su $A(x(t_0), y(t_0))$ i $B(x(t_1), y(t_1))$ koordinate početne i krajnje tačke ove krive i neka su $y(t) \geq 0$ i $\dot{x}(t)$ neprekidne na intervalu $[t_0, t_1]$. Tada površinu P ograničenu krivom $x = x(t)$, $y = y(t)$ i pravama $x = x(t_0)$, $x = x(t_1)$ i $y = 0$, videti sliku 3, možemo izračunati uvodeđenjem smene $x = x(t)$ u integral $\int_a^b y(x)\,dx$, odnosno

$$P = \int_a^b y(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} y(x(t))\dot{x}(t)\,dt = \boxed{\int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)\,dt,} \text{ gde je } \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}.$$



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_1]$$

$$P = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$$

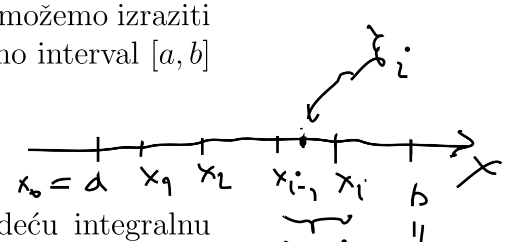
$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$$

Slika 3: Krivolinijski trapez određen parametarski zadatom funkcijom $x = x(t)$, $y = y(t)$.

0.1.2 Izračunavanje zapremine obrtnih tela

Posmatrajmo funkciju $y = f(x)$ koja je neprekidna na intervalu $[a, b]$. Obrtanjem krive $y = f(x)$ oko x-ose dobijamo površ koja zajedno sa ravnima $x = a$ i $x = b$ obrazuje obrtno telo zapremine V. Presek ovog obrtnog tela sa ravni, koja je normalna na x-osu i koja prolazi kroz tačku $A(x, 0)$, je krug sa centrom u tački A i poluprečnika $r = f(x)$. Dakle, površinu ovog kruga možemo izraziti funkcijom $S(x) = \pi f^2(x)$, koja je neprekidna na $[a, b]$. Podelimo interval $[a, b]$ na n delova:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$



Za porizvoljno izabrane tačke $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ formirajmo sledeću integralnu sumu

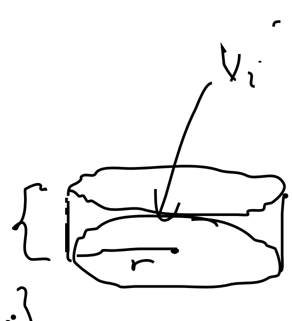
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\sum_{1=1}^{n} S(\xi_i)\triangle x_i, \quad \text{gde je } \triangle x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Primetimo da opšti član ove sume $S(\xi_i)\triangle x_i$ predstavlja zapreminu pravog cilindra sa bazom $S(\xi_i)$ i visinom $\triangle x_i$, videti sliku 4, što ujedno predstavlja i zapreminu jednog segmenta posmatranog obrtnog tela. U graničnom slučaju, kada $\max \triangle x_i \to 0$, ova suma će težiti zaprimini obrtnog tela V. Dakle, možemo

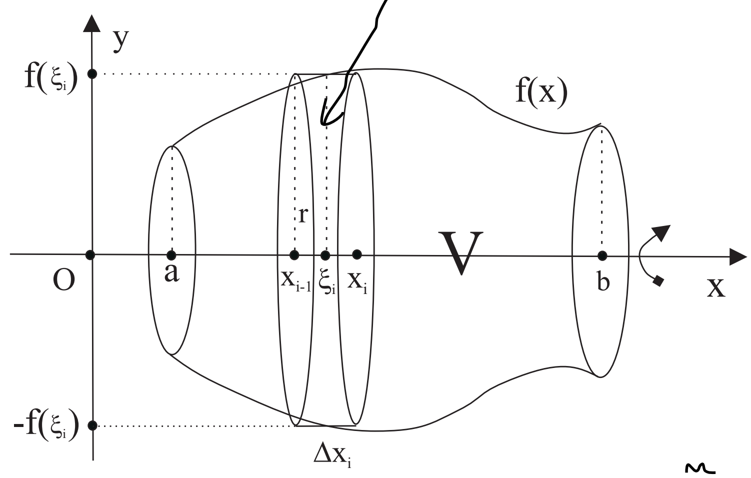
$$ZAP(V_i) = r^2 \pi \cdot h \qquad h = \Delta x_i$$

$$ZAP(V_i) = \pi f^2(\xi_i) \cdot \Delta x_i \qquad r = f(\xi_i)$$



$y = f(x), \quad x \in [a, b]$

V_i



Slika 4: Zapremina obrtnog tela.

$V = \sum_{i=1}^{n} V_i =$

V_i

$= \sum_{i=1}^{n} \overbrace{f^2(\xi_i)\pi} \cdot \Delta x_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i) \Delta x_i$

pisati

$f^2(\xi_i)\pi$

$$\lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{1=1}^{n} S(\xi_i) \triangle x_i = V.$$

Poslednja granična vrednost integralne sume postoji, jer je funkcija $S(x)$ neprekidna. Na osnovu definicije određenog integrala, sledi sledeća formula za izračunavanje zapremine obrtnog tela

$S(x) = \pi f^2(x)$

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.}$$

Neka je kriva $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$ zadata u parametarskom obliku pomoću funkcija $x = x(t)$ i $y = y(t)$ za $t \in [t_0, t_1]$, gde je $A(a, f(a)) = (x(t_0), y(t_0))$ i $B(b, f(b)) = (x(t_1), y(t_1))$. Iz formule za izračunavanje zapremine obrtnog tela, uvođenjem smene $x = x(t)$, dobijamo odgovarajuću formulu za parametarski zadatu funkciju

$y = y(x) = f(x)$

smena: $x = x(t)$

$dx = \dot{x}(t)\,dt$

$$\boxed{V = \pi \int_{t_0}^{t_1} f^2(x(t))\dot{x}(t)\,dt = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t)\dot{x}(t)\,dt.}$$

$V = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx =$

$= \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(x(t)) \cdot \dot{x}\,dt$

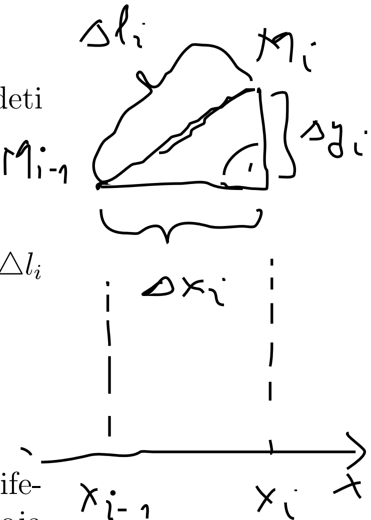
$= \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) \cdot \dot{x}(t)\,dt$

0.1.3 Izračunavanje dužine luka krive

Neka je $f(x)$ diferencijabilna funkcija i $f'(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$. Tačke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ predstavljaju početnu i krajnju tačku ove krive.

Podelimo luk krive $y = f(x)$ između tačaka A i B deobnim tačkama

$$M_0 = A, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B,$$



gde koordinate tačaka M_i obeležićemo sa $(x_i, f(x_i))$ za $i = 0, 1, \ldots, n$, videti sliku 5. Dužina duži koja spaja tačke M_{i-1} i M_i je

PIT. TEOR.

$$\triangle l_i = \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2},$$

gde su $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ i $\triangle y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ za $i = 1, \ldots, n$. Dužinu $\triangle l_i$ možemo napisati i na sledeći način

$$\triangle l_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y_i}{\triangle x_i}\right)^2} \triangle x_i = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \triangle x_i.$$

Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti primenjena na neprekidnu i diferencijabilnu funkciju $f(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ garantuje postojanje broja $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, tako da važi

LUČNA DUŽINA KRIVE

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

$$L \approx \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \cdots + \Delta l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$$

odnosno

$$\triangle l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \triangle x_i.$$

Izlomljena linija $M_0, M_1, \ldots, M_n$, čija je dužina jednaka $\sum_{i=1}^{n} \triangle l_i$, predstavlja jednu aproksimaciju dužine luka krive između tačaka A i B. U graničnom slučaju, kada $\max \triangle x_i \to 0$, ova izlomljena linija postaje baš kriva funkcije između tačaka A i B. Dakle, za dužinu luka krive $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$ možemo pisati

$$L = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \triangle l_i = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \triangle x_i.$$

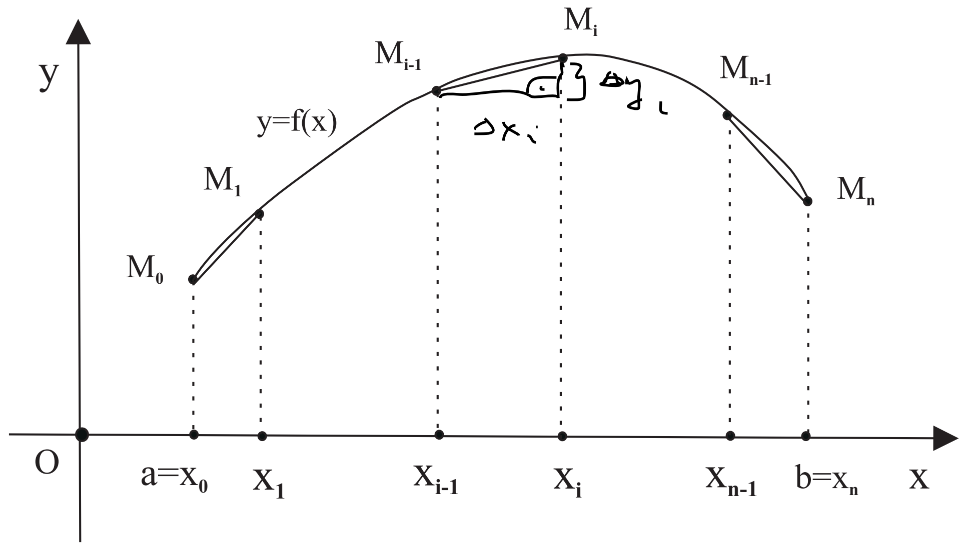
$$S(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

Primetimo da je posmatrani zbir integralna suma neprekidne funkcije $\sqrt{1 + f'^2(x)}$. Iz ovoga sledi da poslednja granična vrednost postoji i može se zapisati u obliku određenog integrala na sledeći način

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x)\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

$L = \overset{\frown}{M_0 M_n}$



Slika 5: Dužina luka krive.

što predstavlja formulu za izračunavanje dužine luka krive $y = f(x)$ za $a \leq x \leq b$.

Neka je posmatrana kriva $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$ zadata u parametarskom obliku: $x = x(t)$, $y = y(t)$ gde je $t_0 \leq t \leq t_1$. Tada se tačke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b)$ dobijaju za izbore parametra $t = t_0$ i $t = t_1$, respektivno. Pretpostavimo da su funkcije $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ neprekidne na posmatranom intervalu. Formulu za izračunavanje dužine luka parametarski zadate krive možemo da izvedemo uvođenjem smene $x = x(t)$ u prethodnu formulu: $x = x(t) \Rightarrow dx = \dot{x}(t)\,dt$

$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx \rightsquigarrow$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2}\, \underbrace{\dot{x}(t)\,dt}_{dx} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt,$$

primetimo da je $\dot{x}(t) \geq 0$, jer iz $a \leq x(t) \leq b$ sledi da $x(t)$ mora biti nerastuća funkcija.

$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

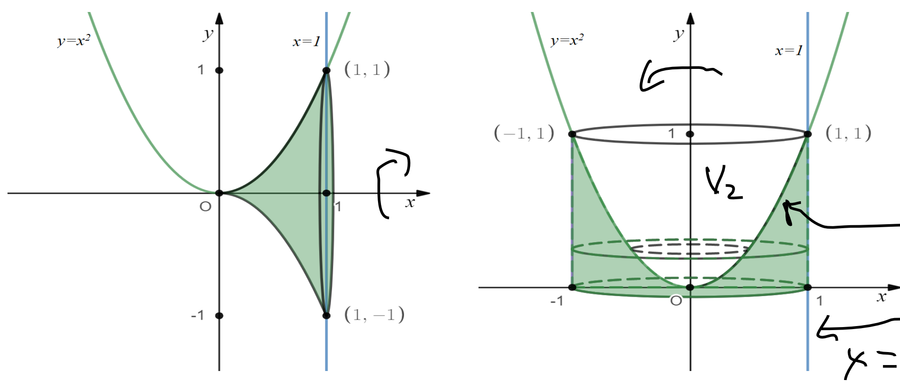
0.2 PRIMERI

0.2.1 Zapremina obrtnog tela

1. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure ograničene parabolom $y = x^2$ i pravama $x = 0,\ x = 1$ i $y = 0$

(a) oko x-ose;

(b) oko y-ose.



(a) (b)

Slika 6: Telo dobijeno rotacijom definisane figure oko (a) x-ose; (b) y-ose.

$y = x^2$

$\Downarrow$

$x = \pm\sqrt{y}$

$x(y) = \sqrt{y}$

$x(y) = 1$

$0 \leq y \leq 0$

$V_1 = \pi \int_0^1 1^2 \, dy$

$V_2 = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 \, dy$

$V = V_1 - V_2$

Rešenje: (a) Telo čiju zapreminu tražimo predstavljeno je na Slici 6(a) i njegovu zapreminu određujemo na sledeći način:

$$V = \pi \cdot \int_0^1 y(x)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^1 x^4 \, dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \cdot \left(1^5 - 0^5\right) = \frac{\pi}{5}.$$

(b) S obzirom da je posmatrano telo određeno rotacijom figure oko y-ose neophodno je prethodno odrediti inverznu funkciju funkcije $f(x) = x^2$, odnosno funkciju $g(y) = f^{-1}(x^2)$. Tako za $f(x) = x^2 : [0,1] \to [0,1]$, koristeći relaciju $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$, imamo da je odgovarajuća inverzna funkcija određena sa $g(y) = \sqrt{y} : [0,1] \to [0,1]$. Dalje, kao što se sa Slike 6(b) može uočiti, imamo da tražena zapremina predstavlja razliku zapremina tela koja nastaju rotacijom prave $x = 1$ i krive $g(y) = \sqrt{y}$, $y \in$

$[0,1]$ oko y-ose. Tada imamo sledeće:

$$\begin{aligned} V = V_1 - V_2 &= \pi \cdot \int\limits_0^1 1^2\ dy - \pi \cdot \int\limits_0^1 g(y)^2\ dy \\ &= \pi \cdot \int\limits_0^1 dy - \pi \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{y}^{\ 2}\ dy = \pi \cdot \int\limits_0^1 dy - \pi \cdot \int\limits_0^1 y\ dy \\ &= \pi \cdot \left(y\Big|_0^1 - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \right) = \pi \cdot \left(1 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \left(1^2 - 0^2\right) \right) \\ &= \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Odrediti zapreminu elipsoida koje nastaje rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko x-ose.

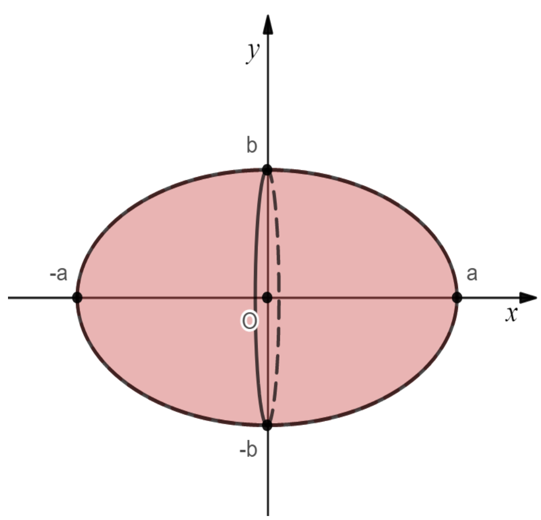
Rešenje: Da bismo odredili zapreminu posmatranog tela, odnosno elipsoida neophodno je prethodno jednačinu elipse predstaviti kao familju odgovarajućih krivih određenih na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ &\Leftrightarrow \ \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ &\Leftrightarrow \ y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \ \Leftrightarrow \ y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \end{aligned}$$

gde grafici funkcija $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ i $y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ određuju gornju, pozitivnu (odnosno iznad x-ose) i donju, negativnu (ispod x-ose) granu odgovarajuće elipse. Posmatrani elipsoid je tada određen rotacijom oko x-ose figure ograničene gornjom granom elipse (to jest grafikom funkcije

$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $-a \leq x \leq a$) i x-osom (Slika 2), odakle dalje imamo:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int\limits_{-a}^{a} y(x)^2 \, dx = \pi \cdot \int\limits_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\
&= b^2\pi \cdot \left(\int\limits_{-a}^{a} dx - \int\limits_{-a}^{a} \frac{x^2}{a^2} \, dx \right) = b^2\pi \cdot \left(\int\limits_{-a}^{a} dx - \frac{1}{a^2} \cdot \int\limits_{-a}^{a} x^2 \, dx \right) \\
&= b^2\pi \cdot \left(x\Big|_{-a}^{a} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a} \right) = b^2\pi \cdot \left[a - (-a) - \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{a^3}{3} - \frac{(-a)^3}{3} \right) \right] \\
&= b^2\pi \cdot \left[a + a - \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} \right) \right] = b^2\pi \cdot \left(2a - \frac{1}{\cancel{a^2}} \cdot \frac{2a^{\cancel{3}}}{3} \right) \\
&= b^2\pi \cdot \left(2a - \frac{2a}{3} \right) = b^2\pi \cdot \frac{4a}{3} = \frac{4ab^2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

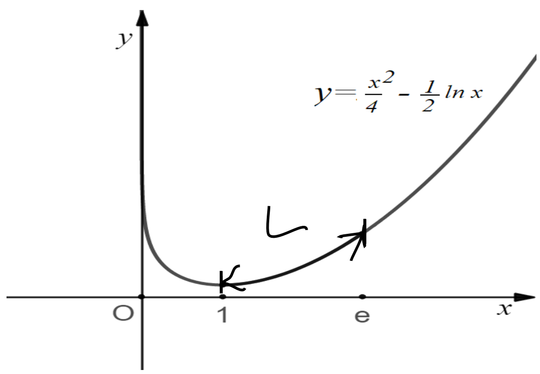


Slika 7: Telo (elipsoid) određeno rotacijom elipse oko x-ose.

0.2.2 Dužina luka krive

1. Izračunati dužinu luka krive $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ za $1 \leq x \leq e$.

   Rešenje: Kako je $y'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{2x}$ tada traženu dužinu luka



Slika 8: Luk krive čiju dužinu određujemo u prvom zadatku.

krive računamo na sledeći način:

$$L = \int_1^e \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\, dx$$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$$= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2}\, dx = \int_1^e \frac{x^2+1}{2x}\, dx$$

$= a, \ a \geq 0$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\int_1^e x\, dx + \int_1^e \frac{1}{x}\, dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^e + \ln x\Big|_1^e \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \underbrace{\ln e}_{1} - \underbrace{\ln 1}_{0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

2. Izračunati dužinu prvog luka cikloide $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$

   $0 \leq t \leq 2\pi$

(to jest za t od 0 do 2π).

Rešenje: Cikloidu možemo da vidimo na Slici 2). Kako je posmatrana cikloida zadata u parametarskom obliku, potrebno je prethodno izračunati ogovarajuće izvode njenih parametarskih funkcija $x(t)$ i $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t),$$
$$\dot{y}(t) = (a(1 - \cos t))' = a \sin t,$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= (a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2 \\
&= a^2 \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) + a^2 \sin^2 t \\
&= a^2 \Big(1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}\Big) \\
&= a^2 (2 - 2\cos t) = 2a^2 (1 - \cos t) \\
&= 2a^2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2} = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}, \qquad (1)
\end{aligned}$$

gde smo u (1) koristili relaciju $\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$. Sada dužinu prvog luka cikloide računamo na sledeći način:

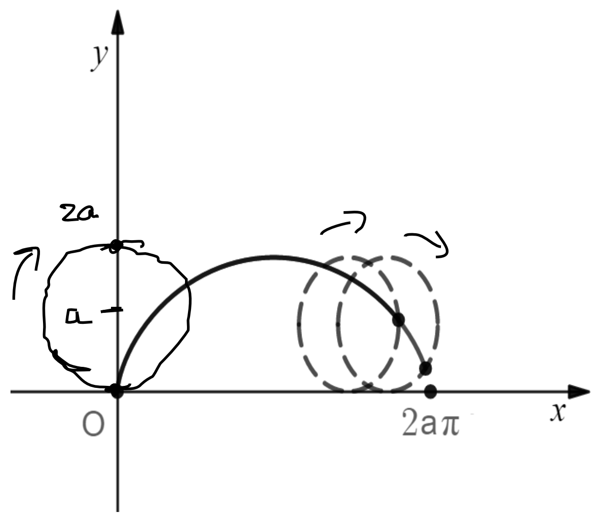
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2}\, dt$$

$$\left[\begin{array}{llll} \text{smena :} & u = \frac{t}{2} & \text{granice :} & t = 0 \to u = 0 \\ & du = \frac{1}{2}\, dt & & t = 2\pi \to u = \pi \\ & 2du = dt & & \end{array}\right]$$

$$= 2a \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin u\, du = 4a \cdot (-\cos u)\Big|_0^{\pi} = -4a \cdot \cos u\Big|_0^{\pi}$$

$$= -4a \cdot (\cos \pi - \cos 0) = -4a \cdot (-1 - 1) = -4a \cdot (-2) = 8a.$$

$a>0$



Slika 9: (a) Položaj fiksirane tačke kružnice poluprečnika $a > 0$, u trenutku $t \in [0, 2\pi]$ tokom njenog kotrljanja, bez klizanja, duž pozitivnog dela x-ose.

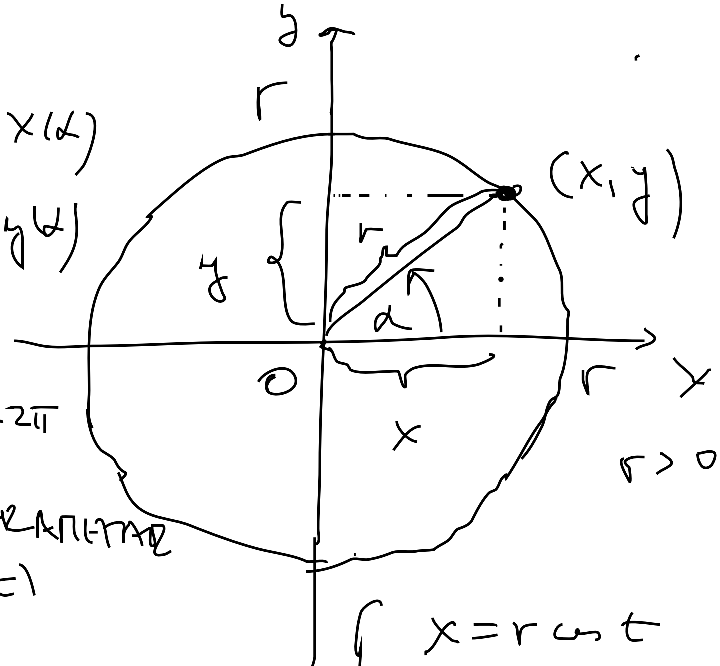
Beleške

PRIMER 2. DOKAZATI DA JE OBIM KRUŽNICE POLUPREČNIKA r JEDNAK $2r\pi$.

REŠ.

PARAMETARSKE JEDN. KRUŽNICE

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\alpha = x(\alpha) \\ y = r\sin\alpha = y(\alpha) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = x(\alpha) \\ y = y(\alpha) \end{cases} \quad 0 \le \alpha \le 2\pi$$

α – PARAMETAR ($\alpha = t$)

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}}\, dt =$$

$$= r\cdot\int_0^{2\pi} dt = r\cdot t\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{2r\pi}}$$

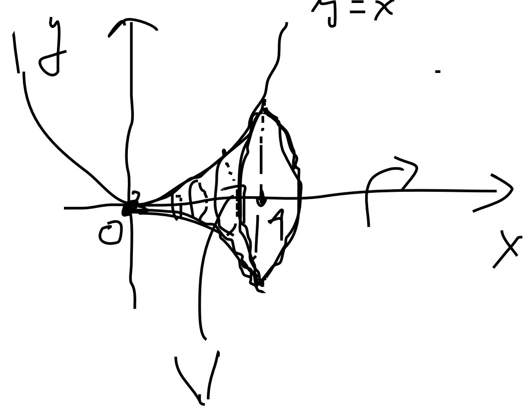
$\dot{y}(t) = r\cos t, \quad \dot{x}(t) = -r\sin t$

PRIMER 1. IZRAČUNATI ZAPREMINU OBRTNOG TELA KOJE NASTAJE ROTACIJOM KRIVE $y = x^2$ OKO

(a) X-OSE ZA $0 \le x \le 1$

REŠ.

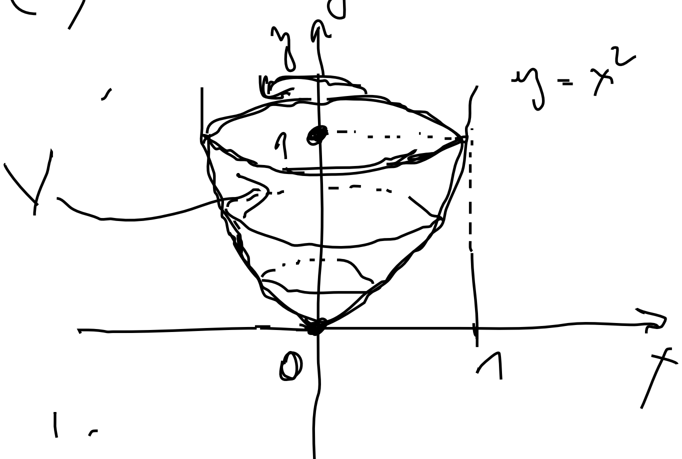
(a)



$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 \, dx = \pi \int_0^1 x^4 \, dx =$$

$$= \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{0}{5} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{5}}}$$

(b) OKO y-OSE



$$y(1) = (1)^2 = 1$$

$$y = y(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

$$\boxed{\cancel{x = -\sqrt{y}}}$$

$$x(y) = ?$$

$$x(y) = \sqrt{y}$$

$$0 \le y \le 1$$

$$V = \pi \int_0^1 (x(y))^2 \cdot dy =$$

$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^1 y \, dy = \pi \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$