Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.Z106)
STUDIJSKI PROGRAM: GT, ZR, ZU

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Primena određenog integrala - izračunavanje površine omotača obrtnog tela, težište ravne figure

Radna nedelja br. 6

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

0.0.1 Izračunavanje površine omotača obrtnog tela

Neka su funkcije $f(x)$ i $f'(x)$ neprekidne na intervalu $[a, b]$. Pretpostavimo da luk krive $y = f(x)$ od tačke $A(a, f(a))$ do tačke $B(b, f(b))$ obrće oko x-ose, formirajući obrtno telo. Podelimo luk krive $y = f(x)$ između tačaka A i B tačkama

$$M_0 = A, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B,$$

a koordinate tačaka M_i obeležimo sa $(x_i, f(x_i))$ za $i = 0, 1, \ldots, n$. Obeležimo sa $\triangle P_i$ površinu omotača prave zarubljene kupe koja nastaje obrtanjem duži $\overline{M_{i-1}M_i}$ oko x-ose. Ovu površinu možemo zapisati koristeći formulu za omotač zarubljene kupe, tj.

$$\triangle P_i = \pi \triangle l_i (f(x_{i-1}) + f(x_i)),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

gde je $\triangle l_i$ dužina bočne ivice, a $f(x_{i-1}) = r$ i $f(x_i) = R$ su poluprečnici osnova prave zarubljenje kupe, videti sliku 1. Tada je $\triangle l_i$ dužina duži $\overline{M_{i-1}M_i}$. U prethodnom odeljku **??**, koji se bavi dužinom luka krive, smo videli da koristeći Lagranžovu teoremu, $\triangle l_i$ možemo izraziti u obliku

$$\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\triangle x_i,$$

gde su $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ i $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$. Dakle, sada sledi da je

$$\triangle P_i = \pi \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\triangle x_i (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

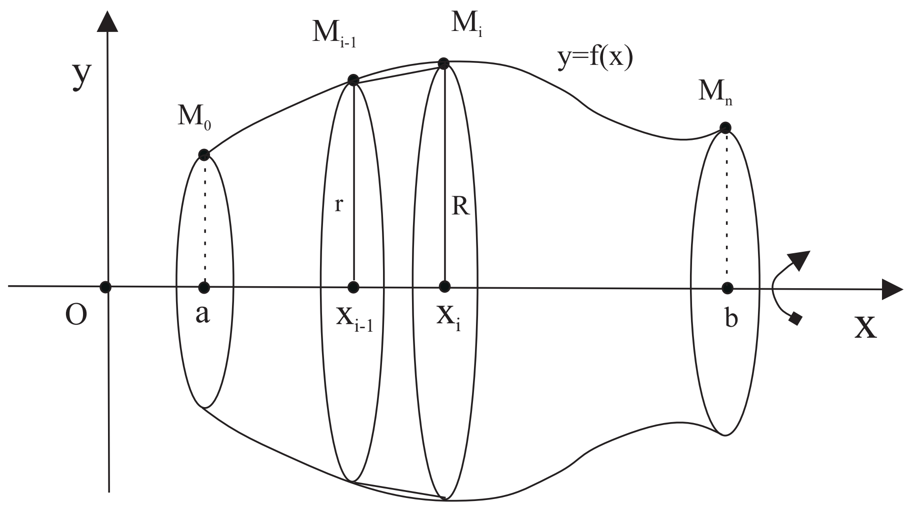
Funkcija $f(x)$ je neprekidna funkcija na zatvorenom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, stoga uzima sve brojne vrednosti između minimuma i maksimuma na tom intervalu, pa možemo pisati

$$f(x_{i-1}) + f(x_i) = 2 \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = 2f(\overline{\xi_i}),$$

za neko $\overline{\xi_i} \in [x_{i-1}, x_i]$. To nam omogućava da sada pišemo

$$\triangle P_i = 2\pi f(\overline{\xi_i}) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\triangle x_i.$$

Posmatrajmo sada granični slučaj kada $\max \triangle x_i \to 0$. Tada, na osnovu neprekidnosti funkcije $f(x)$, u poslednjem izrazu $\overline{\xi_i}$ možemo zameniti sa ξ_i, jer dobijena nova vrednost $2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\triangle x_i$ teži ka $2\pi f(\overline{\xi_i})\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\triangle x_i$.



Slika 1: Površina omotača obrtnog tela.

Sada ukupnu površinu omotača obrtnog tela možemo zapisati kao sumu svih $\triangle P_i$, odnosno

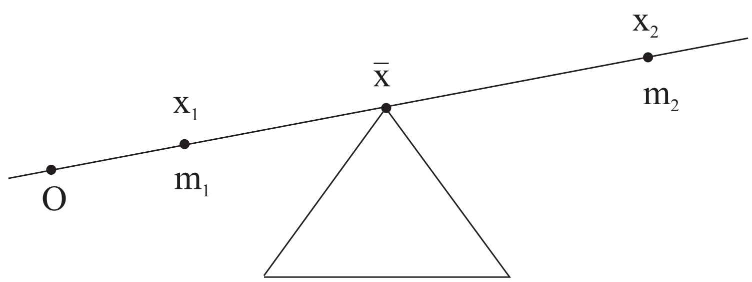
$$P = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \triangle P_i = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \triangle x_i.$$

Primetimo da poslednju sumu možemo tretirati i kao integralnu sumu neprekidne funkcije $f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$, pa granična vrednost postoji i možemo pisati

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Pretpostavimo da je posmatrana kriva $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$ zadata u parametarskom obliku: $x = x(t)$ i $y = y(t)$, gde je $t_0 \leq t \leq t_1$. Tada se tačke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b)$ dobijaju za vrednosti parametara $t = t_0$ i $t = t_1$, respektivno. Pretpostavimo da su funkcije $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ neprekidne na posmatranom intervalu. Formulu za površinu omotača obrtnog tela za parametersku krivu možemo dobiti uvođenjem smene $x = x(t)$, odnosno

$$P = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(x(t)) \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2(t)}{\dot{x}^2(t)}}\, \dot{x}(t)\, dt = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$



Slika 2: Poluga sa masama m_1 i m_2.

0.0.2 Težište ravne figure

Za početak posmatrajmo polugu sa masama m_1 i m_2, kao što je prikazano na slici 2. Mase su smeštene na položajima x_1 i x_2, u odnosu na koordinatni početak O, i poluga je poduprta u tački $\overline{x}$. Arhimedov zakon poluge tvrdi da je poluga u ravnotežnom položaju, ako je zadovoljena sledeća jednačina

$$m_1(\overline{x} - x_1) = m_2(x_2 - \overline{x}),$$

odnosno

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

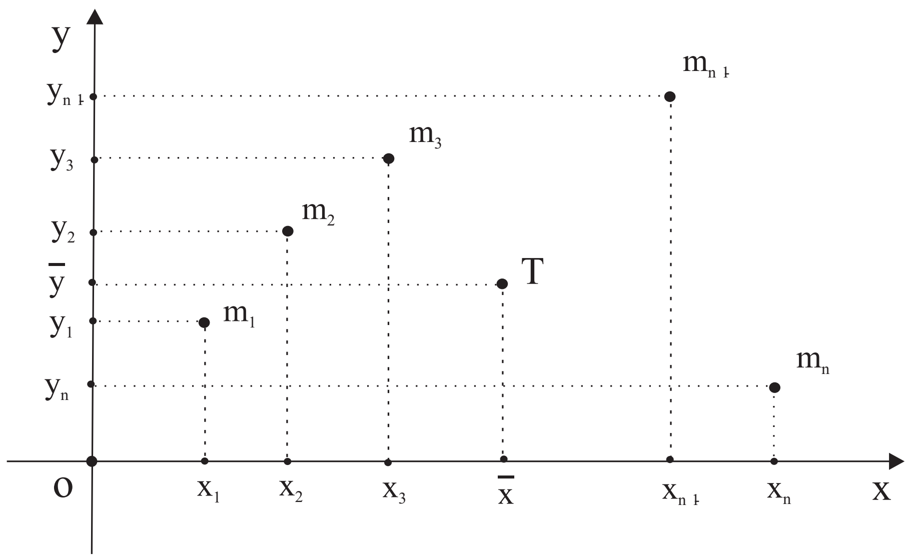
gde veličinu $m_i x_i$, za $i \in \{1, 2\}$, nazivamo **moment mase** m_i. Uopštavajući prethodni rezultat, posmatrajmo sistem sa masama $m_1, m_2, \ldots, m_n$, koje se nalaze u tačkama $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tada sistem ima ravnotežu u tački

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M}{m},$$

gde su M moment sistema, a m ukupna masa sistema.

Sada smo u mogućnosti da posmatramo sistem od n diskretnih čestica sa različitim masama smeštenih u istoj ravni. Neka su (x_i, y_i) koordinate mase m_i za $i = 1, 2, \ldots, n$, videti sliku 3. Tada je težiste ovog sistema tačka $T(\overline{x}, \overline{y})$ sa koordinatama

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \ \text{ i } \ \overline{y} = \frac{M_x}{m}, \tag{1}$$



Slika 3: Težište sistema od n čestica u ravni.

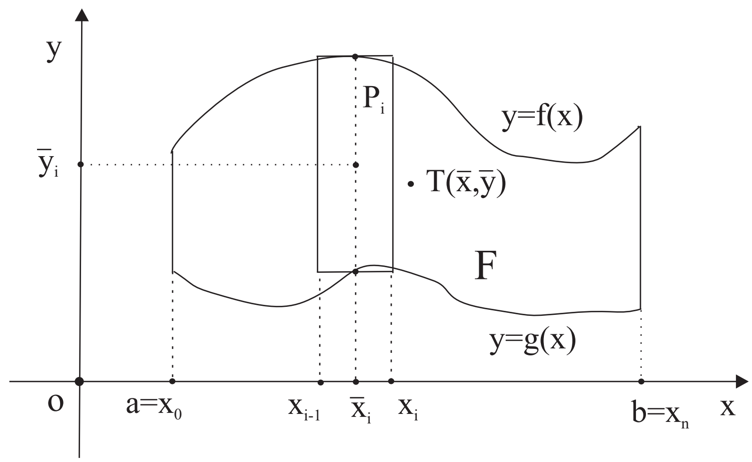
gde su $M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ moment sistema oko y-ose, $M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ moment sistema oko x-ose, a $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ je ukupna masa sistema.

Pređimo sada na određivanje težišta ravne figure ili ploče proizvoljnog oblika. Neka je ravna figura uniformne površinske gustine ρ određena pravama $x = a$, $x = b$ i graficima neprekidnih funkcija $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gde je $g(x) \leq f(x)$ za $x \in [a, b]$, videti sliku 4. Podelimo interval $[a, b]$ na n delova

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Obeležimo sa $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ dužinu podintervala $[x_{i-1}, x_i]$, a sa $\overline{x}_i$ njegovu sredinu, tj. $\overline{x}_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Sa P_i ćemo obeležiti pravougaonik sa dužinom stranica $\triangle x_i$ i $f(\overline{x}_i) - g(\overline{x}_i)$, i sa težištem u tački $T_i = (\overline{x}_i, \overline{y}_i)$, gde je $\overline{y}_i = \dfrac{f(\overline{x}_i) + g(\overline{y}_i)}{2}$, videti sliku 4. Masu prvougaounika P_i možemo prikazati kao proizvod gustine i površine, tj. $m(P_i) = \rho(f(\overline{x}_i) - g(\overline{x}_i))\triangle x_i$. Za koordinate težišta P_i, na osnovu formula (1), možemo pisati

$$\overline{x}_i = \frac{M_y(P_i)}{m(P_i)} \ \text{ i } \ \overline{y}_i = \frac{M_x(P_i)}{m(P_i)},$$



Slika 4: Težište ravne figure F.

gde su $M_y(P_i)$ i $M_x(P_i)$ momenti sistema tačaka pravougaonika P_i oko y i x-ose, respektivno. Iz poslednje dve formule lako dobijamo da je

$$M_y(P_i) = \rho(f(\overline{x}_i) - g(\overline{x}_i))\triangle x_i\,\overline{x}_i \quad \text{i}$$

$$M_x(P_i) = \rho(f(\overline{x}_i) - g(\overline{x}_i))\triangle x_i\,\frac{f(\overline{x}_i) + g(\overline{x}_i)}{2}.$$

Konačno, momente posmatrane ravne figure, $M_y(F)$ i $M_x(F)$, možemo dobiti sabiranjem svih $M_y(P_i)$, odnosno $M_x(P_i)$, uz pretpostavku da $\max \triangle x_i \to 0$. U formalnom zapisu to izgleda ovako

$$\begin{aligned} M_x(F) &= \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_x(P_i) \\ &= \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{f^2(\overline{x}_i) - g^2(\overline{x}_i)}{2} \triangle x_i \end{aligned}$$

gde poslednji zbir možemo interpretirati kao integralnu sumu od neprekidne funkcije, što nam daje za pravo da pišemo

$$M_x(F) = \frac{\rho}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,dx.$$

Rezonujući na sličan način, možemo doći do formule

$$M_y(F) = \rho \int_a^b x(f(x) - g(x))\,dx.$$

Ukupna masa ravne figure, $m(F)$ je zbir masa svih pravougaonika $m(P_i)$ u graničnom slučaju kada je $\max \triangle x_i \to 0$, tj.

$$m(F) = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m(P_i) = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(f(\overline{x}_i) - g(\overline{x}_i))\triangle x_i.$$

Primetimo da je poslednji zbir integralna suma od neprekidne funkcije, pa dobijamo da je

$$m(F) = \rho \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Sada smo u prilici da odredimo težište ravne figure $T(\overline{x}, \overline{y})$, pri čemu su

$$\overline{x} = \frac{M_y(F)}{m(F)}$$

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx} \quad \text{i}$$

$$\overline{y} = \frac{M_x(F)}{m(F)}$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\, dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx}.$$

0.1 PRIMERI

1. Izračunati površinu omotača tela koje nastaje rotacijom figure ograničene sledećim krivama:

   (a) krivom $y = x^3$ i pravama $x = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$ oko x-ose;

   (b) krivom $x = \sqrt{y}$ i pravom $y = 1$ oko y-ose.

   Rešenje: (a) Primetimo prvo da je telo koje se dobija rotacijom oko x-ose dela krive $y = x^3$ za $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ osno-simetrično u odnosu na y-osu (Slika 5(a)). Tada tražena površina omotača tela $P = 2 \cdot P_1$, gde P_1 predstavlja površinu omotača tela određenog rotacijom dela posmatranog luka krive $y = x^3$ koji se nalazi u prvom kvadrantu. Otuda, imamo:

$$P = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\frac{2}{3}} y(x) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}\ dx$$

$$= 4\pi \cdot \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\ dx = 4\pi \cdot \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\ dx$$

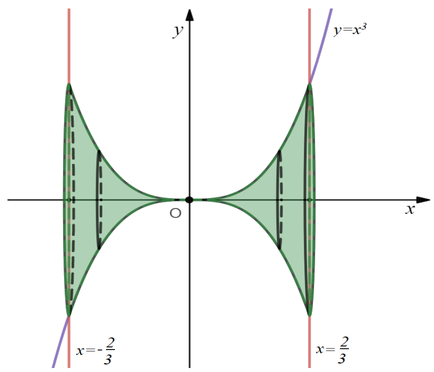
$$\left[\begin{array}{llll} \text{smena}: & t = 1 + 9x^4 & \text{granice}: & x = 0 \to t = 1 \\ & dt = 36x^3\ dx & & x = \frac{2}{3} \to t = \frac{25}{9} \\ & x^3\ dx = \frac{1}{36}\ dt & & \end{array}\right]$$

$$= \cancel{4}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{36}} \cdot \int_1^{\frac{25}{9}} \underbrace{\sqrt{t}}_{t^{\frac{1}{2}}}\ dt = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^{\frac{25}{9}} = \frac{2\pi}{27} \cdot \left[\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

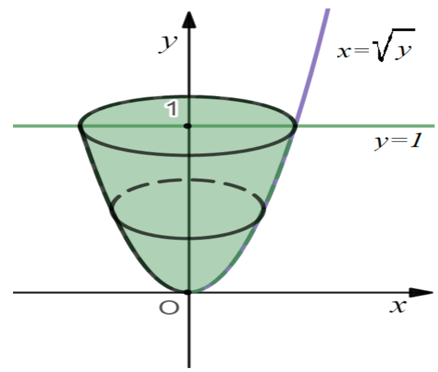
$$= \frac{2\pi}{27} \cdot \left[\left(\sqrt{\frac{25}{9}}\right)^3 - 1\right] = \frac{2\pi}{27} \cdot \left[\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 1\right]$$

$$= \frac{2\pi}{27} \cdot \left(\frac{125}{27} - 1\right) = \frac{2\pi}{27} \cdot \frac{98}{27} = \frac{196\pi}{729}.$$

(b) Kako je posmatrano telo određeno rotacijom osenčene figure na Slici



(a)



(b)

Slika 5: (a) Telo koje je određeno rotacijom figure iz prvog zadatka pod (a) oko x-ose; (b) telo određeno rotacijom figure iz prvog zadatka pod (b) oko y-ose.

5(b) oko y-ose, tada za njegovu površinu omotača imamo sledeće:

$$P = 2\pi \cdot \int_0^1 x(y) \cdot \sqrt{1 + x'(y)^2}\, dy = 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy$$

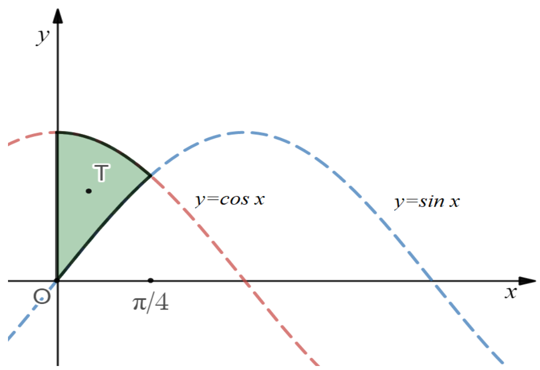
$$= 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{y + \frac{1}{4}}\, dy$$

$$\left[\begin{array}{llll} \text{smena}: & t = y + \frac{1}{4} & \text{granice}: & y = 0 \to t = \frac{1}{4} \\ & dt = dy & & y = 1 \to t = \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

$$= 2\pi \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} \underbrace{\sqrt{t}}_{t^{\frac{1}{2}}}\, dt = 2\pi \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} = \frac{4\pi}{3} \cdot \left[\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{5\sqrt{5} - 1}{8}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot \left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

2. Odrediti težište ravne ploče uniformne gustine ograničene graficima krivih $y = \sin x$ i $y = \cos x$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{4}]$. **Rešenje:** Koordinate težišta



Slika 6: Ravna ploča čije težiste određujemo.

$T(\bar{x}, \bar{y})$ ravne ploče uniformne gustine koja se proteže od grafika funkcije $y = f(x)$ do grafika funkcije $y = g(x)$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{4}]$ (Slika 6) određujemo na sledeći način:

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot (g(x) - f(x)) \ dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x)) \ dx} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot (\cos x - \sin x) \ dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \ dx}$$

$$\begin{bmatrix} \text{parcijalna integracija :} & \\ u = x & dv = (\cos x - \sin x) \ dx \\ du = dx & v = \sin x + \cos x \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x \cdot (\cos x + \sin x) \ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) \ dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \ dx}$$

$$= \frac{x \cdot (\cos x + \sin x) \ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\sin x - \cos x) \ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}}{(\sin x + \cos x) \ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\overbrace{\cos\frac{\pi}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \overbrace{\sin\frac{\pi}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) - \left[\overbrace{\sin\frac{\pi}{4}}^{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}} - \overbrace{\cos\frac{\pi}{4}}^{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}} - \left(\overbrace{\sin 0}^{0} - \overbrace{\cos 0}^{1}\right)\right]}{\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \left(\underbrace{\sin 0}_{0} + \underbrace{\cos 0}_{1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}\pi - 4}{4(\sqrt{2} - 1)},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) + f(x)) \cdot (g(x) - f(x)) \ dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x)) \ dx}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x) \ dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \ dx}$$

$$\left[\begin{array}{llll} \text{smena}: & t = \cos x + \sin x & \text{granice}: & x = 0 \rightarrow t = 1 \\ & dt = (-\sin x + \cos x) \ dx & & x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \sqrt{2} \\ & dt = (\cos x - \sin x) \ dx & & \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\int\limits_1^{\sqrt{2}} t \ dt}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left.\frac{t^2}{2}\right|_1^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left[\overbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}^{2} - 1\right]}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)},$$

odakle imamo da je težište posmatrane figure tačka $T\left(\frac{\sqrt{2}\pi - 4}{4(\sqrt{2}-1)}, \frac{1}{4(\sqrt{2}-1)}\right)$.

Beleške

Beleške