Univerzitet u Novom Sadu

Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.Z106)
STUDIJSKI PROGRAM: GT, ZR, ZU

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Funkcije više promenljivih

Radna nedelja br. 7

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

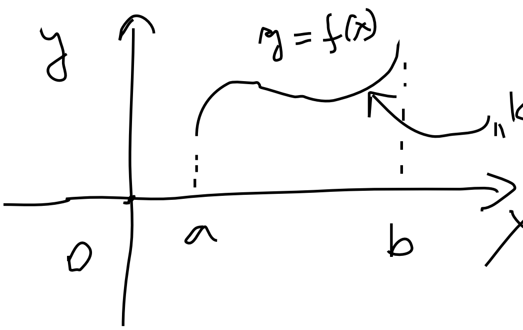
Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

$y = f(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}$

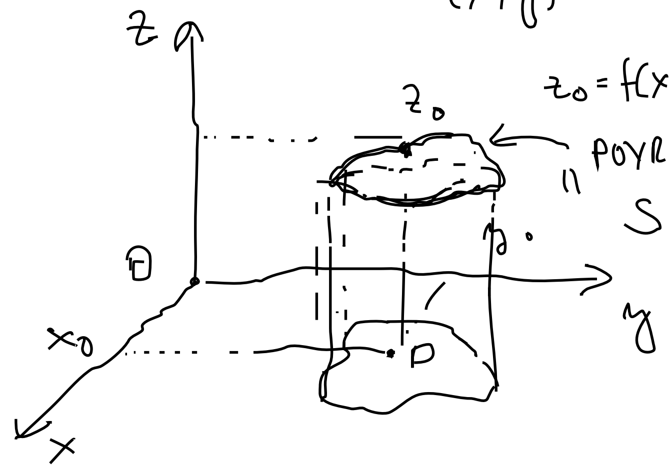
$D = [a, b]$



$z = f(x, y)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x, y) \in D$:

$z_0 = f(x_0, y_0)$



$S = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y) \wedge (x, y) \in D\}$

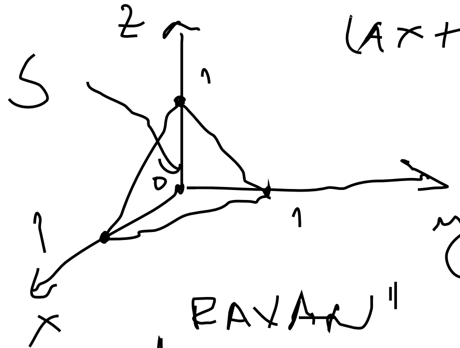
$u = f(x, y, z)$

GEOM. INTERPRETACIJA NE POSTOJI.

$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$1^\circ \quad x+y+z=1 \iff z=-x-y+1 \qquad S=\{(x,y,z) \mid x+y+z=1 \wedge x,y\in\mathbb{R}\}$

$(Ax+By+Cz=D)$



$x=y=0 \Rightarrow z=1$

$x=z=0 \Rightarrow y=1$

$y=z=0 \Rightarrow x=1$

"RAVAN"

$2^\circ \quad z=x^2+y^2$

$y=0 \Rightarrow z=x^2$

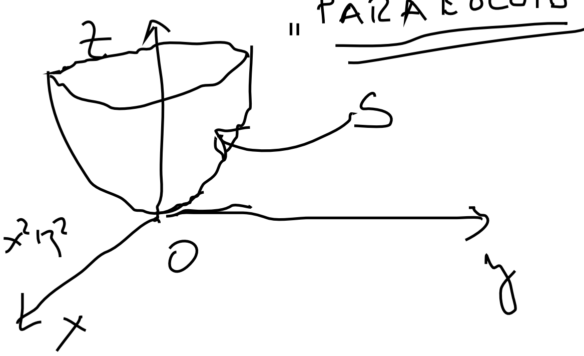
$x=0 \Rightarrow z=y^2$

"PARABOLOID"

Glava 1

Realne funkcije više promenljivih

$S=\{(x,y,z) \mid z=x^2+y^2 \wedge x,y\in\mathbb{R}\}$



Mnoge pojave u realnom svetu često zavise od uticaja više faktora. U matematičkom smislu, merne vrednosti ovakvih pojava se mogu opisati pomoću funkcija više promenljivih, gde svaki faktor odgovara jednom argumentu ili promeljivoj funkcije. Zbog jednostavnosti, u nastavku ćemo se baviti funkcijama koje zavise samo od dve promenljive.

Neka svakom uređenom paru brojeva $(x, y) \in D$, gde je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ pridružena jedna (i samo jedna!) vrednost $z \in \mathbb{R}$. U tom slučaju dobijamo **realnu funkciju dve realne promenljive**, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Skup D zovemo **domen** funkcije, x i y su argumenti, tj. nezavisno promenljive, a z je slika, tj, zavisno promenljiva. Skup slika nazivamo **kodomen**. Ako se ovo pridruživanje može prikazati u obliku

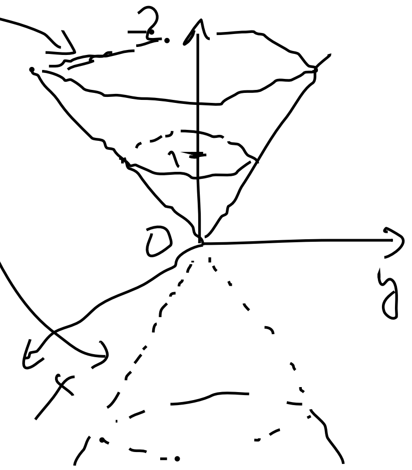
$$z = f(x, y),$$

gde je $f(x, y)$ funkcija od dve promenljive, kažemo da je funkcija zadata u **eksplicitnom obliku**. Međutim, nije uvek moguće izraziti z preko promenljivih x i y. U tom slučaju, preslkavanje najčešće prikazujemo u **implicitnom obliku**

$$F(x, y, z) = 0.$$

Primetimo da implicitni oblik zadavanja preslikavanja omogućava i **višeznačno preslikavanje**, tj. da nekim uređenim parovima (x, y) odgovara više od jedne vrednosti z. Očigledan primer za ovo preslikavanje je jednačina centralne sfere poluprečnika jedan: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

30° $z^2 = x^2 + y^2$ $\Leftrightarrow$ $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = -\sqrt{x^2+y^2}$



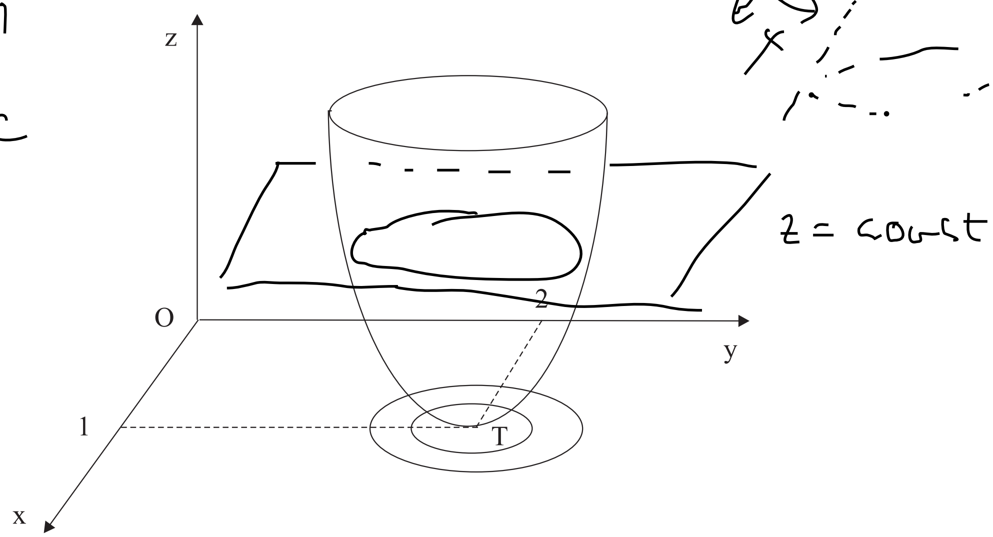
$y = 0 \Rightarrow z^2 = x^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{x^2} = |x|$

$x = 0 \Rightarrow z^2 = y^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{y^2} = |y|$

"KONUS"

$z = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$z = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c$



Slika 1.1: Paraboloid $z = (x-1)^2 + (y-2)^2$ sa nivo krivama (kružnicama) u xy-ravni.

U prostornom pravougaonom koordinatnom sistemu, svakom uređenom paru $(x, y) \in D$ ogdovara jedna tačka u xy-ravni. Funkcija $z = f(x, y)$ pridružuje z koordinatu tački domena i tako dobijamo tačku u prostoru $M(x, y, z)$. Skup svih tačaka, dobijenih na ovakav način, formira **prostorni grafik funkcije**, koji ćemo često nazivati **površ funkcije** u prostoru ili samo kratko **površ**. Ovu površ možemo predstaviti i kao geometrijsko mesto tačaka definisanih skupom

$$S = \{(x, y, z) | \, F(x, y, z) = 0, \, (x, y) \in D\}.$$

Primer 1 *Predstaviti u prostornom koordinatnom sistemu površ koja je određena funkcijom*

$$z = (x-1)^2 + (y-2)^2.$$

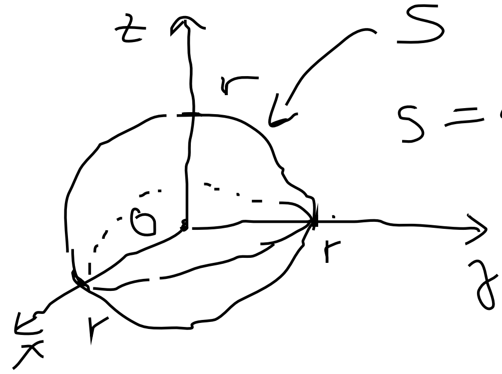
Kao prvi korak, odredimo preseke tražene površi sa ravnima paralelnim xy-ravni, tj. sa ravnima čija je jednačina $z = c$, gde je konstanta $c \in \mathbb{R}$. Na taj način ćemo dobiti **nivo krive** površi:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = c,$$

koje za $c \geq 0$ predstavljalju kružnice u xy-ravni sa centrom u $T(1, 2)$. Primetimo da za $c < 0$ jednačina nema rešenja. Presek sa ravni $x = 1$ je parabola $z = (y-2)^2$, a presek sa ravni $y = 2$ je parabola $z = (x-1)^2$.

4^0 $x^2+y^2+z^2=r^2$

SFERA



$S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=r^2 \wedge x,y \in \mathbb{R}\}$

Na osnovu dobijenih nivo krivih i preseka sa ravnima $x = 1$ i $y = 2$ zaključujemo da se data površ može dobiti rotacijom kvadratne parabole oko prave koja prolazi kroz tačku T i paralelna je sa z-osom. Zadatu površ nazivamo paraboloid sa temenom u tački $T(1, 2, 0)$, videti sliku 1.1.

Parabolid je površ iz klase **površi drugog reda**. Površi drugog reda su analogni objekti krivama drugog reda u ravni, i u njih, između ostalih, ubrajamo konus, cilindar, sferu i elipsoid.

Razume se, funkcije mogu da zavise i više od dve premenljive, pa tako razlikujemo funkcije tri, četiri ili $n \in \mathbb{N}$ realnih promenljivih $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gde je $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Međutim, prostorno-geometrijsko predstavljanje ovih funkcija nije moguće.

1.1 Parcijalni izvodi i totalni diferencijal

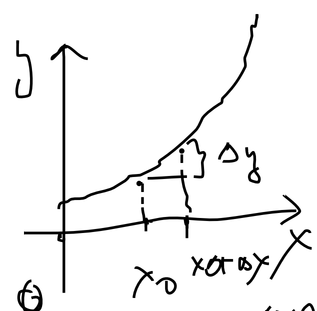
$y = f(x)$

Posmatrajmo funkciju dve realne promenljive $z = f(x, y)$. Ako fiksiramo jednu nezavisnu promenljivu (proglasimo je za konstantu) dobićemo funkciju od jedne promenljive. U ovakvom slučaju, možemo tražiti izvod po toj, "slobodnoj", promenljivoj. Ovaj izvod ćemo nazivati parcijalni izvod funkcije. Sledeći ovu deju, dolazimo do definicije parcijalnog izvoda.

$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Parcijalni izvod funkcije $z = f(x, y)$ u tački (x_0, y_0) po promenljivoj x obeležavamo sa $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ i definišemo sa

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x}.$$



Kažemo da $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ postoji, ako postoji granična vrednost iz gornje definicije. Na sličan način definišemo parcijalni izvod po promenljivoj y (ili skraćeno po y-u) u tački (x_0, y_0)

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y}.$$

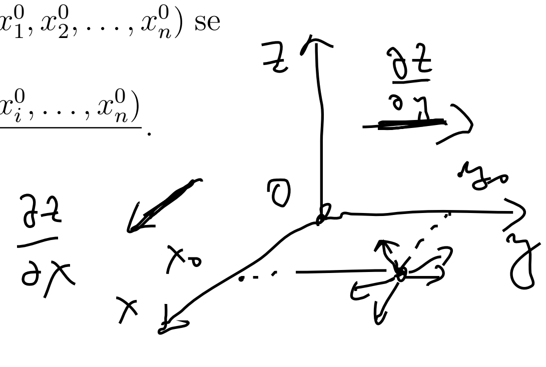
$y'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\Delta x \to 0$

Umesto oznake $\frac{\partial z}{\partial x}$ možemo koristiti i zapise $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x ili f'_x.

$z = f(x,y)$

Definiciju parcijalnog izvoda na analogan način možemo proširiti na funkciju n realnih promenljivih $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gde je $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Parcijalni izvod funkcije z po promenljivoj x_i u tački $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ se definiše kao

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M_0) = \lim_{\triangle h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \triangle h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{\triangle h}.$$



Ako gore dobijene parcijalne izvode prvog reda ponovo diferenciramo, dobićemo parcijalne izvode drugog reda. **Parcijalni izvodi drugog reda** po x i y se mogu zapisati na sledeći način

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Uopšte, parcijalni izvodi n-tog reda po x i y se mogu definisati formulama

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\right) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\right).$$

Parcijalni izvodi višeg reda mogu biti i **mešoviti parcijalni izvodi**, na primer

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{i}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right).$$

Uz pretpostavke da je funkcija $z = f(x, y)$ neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda, može se pokazati da su mešoviti izvodi jednaki, tj.

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.}$$

U nastavku rada, mi ćemo se baviti samo funkcijama koje zadovoljavaju ove uslove.

Po ugledu na diferencijal funkcije jedne promenljive, posmatrajmo izraz

DIFERENCIJAL

$z = f(x,y)$

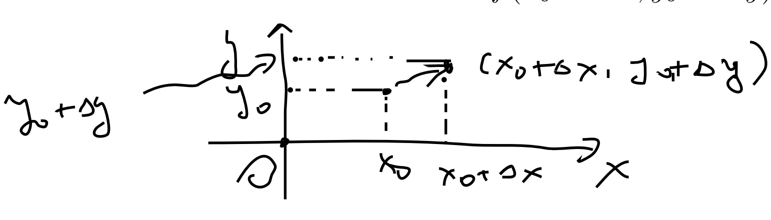
$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,}$$

1D $\quad df = f'(x)\,dx$

koji se naziva **totalni diferencijal prvog reda** za funkciju $z = f(x, y)$. Totalni diferencijal, slično parcijalnim izvodima, je lokalni operator, što znači da zavisi od posmatrane tačke $dz(x_0, y_0)$. Međutim, često pišemo samo dz i tada mislimo na proizvoljnu tačku.

Totalni priraštaj funkcije $\triangle z$ u tački (x_0, y_0) za priraštaje argumenata $\triangle x$ i $\triangle y$ se definiše

$$\triangle z = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0).$$



Δz

Priraštaj može da se prikaže u obliku zbira dveju razlika

$$\triangle z = (f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0 + \triangle y)) + (f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)),$$

gde obe razlike mogu da se aproksimiraju primenom parcijalnih izvoda. Zaista, ako prvu razliku proširimo sa $\triangle x$, dobijamo

$$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0 + \triangle y) =$$

$$= \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0 + \triangle y)}{\triangle x} \triangle x \approx \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0 + \triangle y)\triangle x,$$

i na sličan način, za drugu razliku dobijamo

$$f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle y.$$

Sada za totalni priraštaj $\triangle z$ možemo pisati

$$\triangle z \approx \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0 + \triangle y)\triangle x + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle y,$$

što u graničnom slučaju, kada $\triangle x \to 0$ i $\triangle y \to 0$, daje sledeću relaciju

$$\triangle z = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle x + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle y = dz(x_0, y_0),$$

gde je uzeto da je $dx = \triangle x$ i $dy = \triangle y$. Drugim rečima, pokazali smo da vrednost totalnog diferencijala u tački jednaka je približnoj vrednosti totalnog priraštaja funkcije u toj istoj tački.

Izraz

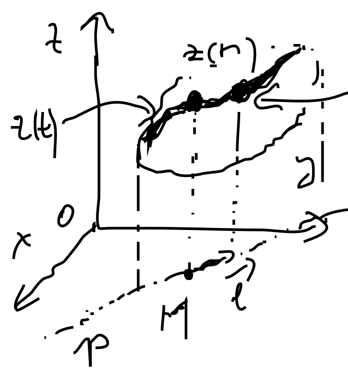
$$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}$$

nazivamo **totalni diferencijal drugog reda** funkcije $z = f(x, y)$.

1.2 Izvod u pravcu i gradijent

Izvod funkcije možemo da shvatimo kao meru promene funkcije u tački pri promeni argumenta. Domen funkcije jedne promenljive je deo realne ose, pa argument može da se kreće samo duž jednog pravca i izvod ne može da zavisi od izbora pravca. Međutim, u slučaju funkcije dve promenljive $z = f(x, y)$,

 $z(\vec{OM} + \vec{l})$

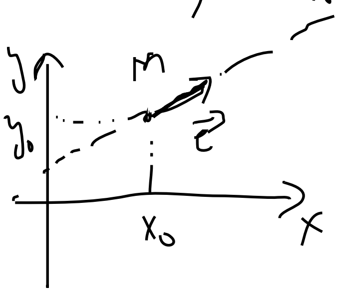


domen je deo xy-ravni, pa sledi da iz jedne posmatrane tačke argumenta može da se pomeri u različitim pravcima i za očekivati je da će i mera promene funkcije, tj. izvod, zavisiti od izbora pravca.

Posmatrajmo tačku $M(x_0, y_0)$ i jedinični vektor $\vec{l_0} = (l_1, l_2)$. Prava u xy-ravni koja prolazi kroz tačku M i ima paravac određen vektorom $\vec{l}$ ima sledeću parametrasku jednačinu

$z = f(x, y)$

$$p: \quad x = x_0 + tl_1, \; y = y_0 + tl_2, \qquad t \text{ - parametar}$$



gde je t realni parametar. U tačkama te prave, funkcija $z = f(x_0 + tl_1, y_0 + tl_2)$ postaje funkcija od jedne promenljive $z(t)$. Sada možemo da posmatramo izvod funkcije $z(t)$ po t-u u tački $t = 0$. Koristeći pravilo za izvod složene funkcije, dolazimo do pravila za računanje izvoda u pravcu vektora $\vec{l_0}$

$$z(t) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{df(x_0 + tl_1, y_0 + tl_2)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} l_1 + \frac{\partial f}{\partial y} l_2.$$

$|\vec{l}| = 1$

Dobijena formula omogućava da definišemo izvod funkcije $z = f(x, y)$ u pravcu jediničnog vektora $\vec{l_0} = (l_1, l_2)$ u tački (x_0, y_0) na sledeći način

SKALARNI PROIZVOD

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) l_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) l_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (l_1, l_2).$$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ nazivamo **gradijent funkcije** $z = f(x, y)$ i obeležavamo sa $grad\, z$ ili ∇f. Ako iskoristimo oznaku gradijenta, formulu za izvod u pravcu vektora $\vec{l_0}$ možemo da pišemo u obliku

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (l_1, l_2) = \nabla f \cdot \vec{l_0}.}$$

Ako posmatramo funkciju koja zavisi od tri promenljive $u = f(x, y, z)$, formula za izračunavanje izvoda u pravcu jediničnog vektora $\vec{l_0} = (l_1, l_2, l_3)$ se na prirodan način transformiše na sledeći oblik

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (l_1, l_2, l_3) = \nabla f \cdot \vec{l_0}.$$

Primenjujući definiciju skalarnog proizvoda dva vektora, možemo analizirati formulu za izvod u pravcu

SPECIJALNO, AKO JE $\vec{l_0} = (1, 0)$ ← PRAVAC X-OSE, TADA JE

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}} = \nabla f \cdot \vec{l_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial x}$$

SLIČNO, ZA $\vec{l_0} = (0,1)$ ∈ PRAVAC y-OSE

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l_0}} = \nabla f \cdot \vec{l_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(0,1) = 0\,\frac{\partial f}{\partial x} + 1\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

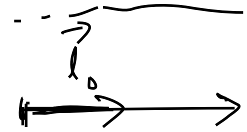
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \nabla f\Big|_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

↑ GRADIJENT FUNKCIJE!

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}} = \nabla f \cdot \vec{l_0} = |\nabla f|\, \underbrace{|\vec{l_0}|}_{=1} \cos\varphi = |\nabla f|\ \cos\varphi,$$

$\cos\varphi \in [-1,1]$

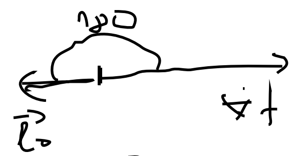
gde je $\varphi \in [0^0, 180^0]$ ugao između vektora ∇f i $\vec{l_0}$. Funkcija $\cos\varphi$ ima najmanju vrednost (-1) za $\varphi = 180^0$, odnosno kada vektor $\vec{l_0}$ biramo tako da ima pravac gradijenta, ali suprotan smer, tj. $\vec{l_0} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Lako je videti da je to ujedno i pravac za koji $\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}$ ima minimalnu vrednost, tj. funkcija $z = f(x,y)$ ima najveći pad. Na sličan način možemo zaključiti da za pravac $\vec{l_0} = +\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ izvod $\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}$ ima maksimalnu vrednost, tj. funkcija ima $z = f(x,y)$ najveći rast.



$\varphi = 0^0$, $\vec{l_0} \parallel \nabla f$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}} = |\nabla f| = MAX$, $\cos\varphi = \cos 0^0 = 1$

1.3 PRIMERI



$\vec{l_0} \parallel -\nabla f$

$\varphi = 180^0$

$\cos\varphi = \cos 180^0 = -1$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}} = -|\nabla f| = MIN$

1.3.1 Parcijalni izvodi. Diferencijal

1. Izračunati prvi i drugi totalni diferencijal sledećih funkcija

   a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

   Rešenje
   Nađimo prvo parcijalne izvode funkcije $\boxed{z = x^3 + y^3 - 3xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Napomena Kada određujemo izvod po x (analogno i za ostale nezavisne promenljive) funkcije više promenljivih, sve ostale nezavisne promenljive tretiramo kao konstante, te se postupak traženja parcijalnog izvoda svodi na traženje izvoda funkcije jedne realne promenljive.

Prvi totalni diferencijal je jednak $\frac{\partial z}{\partial x}$ // $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$dz = (3x^2 - 3y)dx + (3y^2 - 3x)dy.$$

Parcijalni izvodi drugog reda su

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\,dx +$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

DAKLE,
$$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2}$$

dz, $d^2 z$

Drugi totalni diferencijal je

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \\ &= 6x\ dx^2 - 6\ dxdy + 6y\ dy^2. \end{aligned}$$

1.3.2 Izvod u pravcu i gradijent

1. Data je funkcija $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - xy$

   a) Odrediti gradijent od f u tački $A(1, -1)$.

   b) Izračunati izvod u pravcu vektora $\vec{l} = (1, 2)$ funkcije f u tački $B(1, 0)$.

Rešenje

a) Nađimo parcijalne izvode funkcije f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - x$$

Dakle gradijent od f je

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x - y, 6y - x),$$

konkretno u tački $A(1, -1)$ je

$$\nabla f(-1, 1) = (2 \cdot 1 - (-1),\ 6 \cdot (-1) - 1) = (3, -7).$$

$-\nabla f(-1,1) = -(3,-7) = (-3,7) \leftarrow$ PRAVAC NAJBRŽEG PADA

b) Jedinični vektor koji odgovara vektoru $\vec{l}$ je

$$\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

$$|\vec{l}_0| = \left| \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \right| = \frac{1}{|\vec{l}|} \cdot |\vec{l}| = 1$$

Sada možemo primeniti formulu za izvod funkcije f u pravcu vektora $\vec{l}_0$ u tački $B(1,0)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(1,0) &= \nabla f(1,0)\cdot \vec{l}_0 = (2\cdot 1-0,\ 6\cdot 0-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\\ &= \underbrace{(2,-1)}_{\nabla f}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}_{\vec{l}_0} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+(-1)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 0.\end{aligned}$$

PRIMER NEKA JE $f(x,y) = x^2y^2 + 3x$, IZRAČUNATI

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 3$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 0 = 2yx^2$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2yx^2\right) = \underset{\shortparallel}{4yx}$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2xy^2+3\right) = 4xy$

e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2xy^2+3\right) = 2y^2$

f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2yx^2\right) = 2x^2$

PRIMER AKO JE $f(x,y,z) = xyz - \sin(xy)$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = yz - \cos(xy)\cdot y$

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = zx - \cos(xy)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy) =$

$= zx - \cos(xy)\cdot x$

$d \quad \partial$

$(\sin(3x))' =$

$= \cos(3x)\cdot(3x)' =$

$= 3\cdot\cos(3x)$

$(\ln(x+x^2))' =$

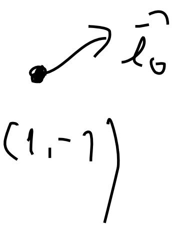
$= \frac{1}{x+x^2}(x+x^2)'$

$= \frac{1}{x+x^2}\cdot(1+2x)$

PRIMER Data je funkcija $f(x,y) = x^2y^2 - 2x$. Odrediti pravac najvećeg rasta ove funkcije u tački $(1,-1)$

Reš.

$$\vec{l_0} = ?$$



$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}} = \nabla f \cdot \vec{l_0}$$

$$\vec{l_0} = +\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2xy^2 - 2, 2yx^2\right)$$

$$\nabla f(x,y) = (2xy^2 - 2, 2yx^2)$$

$$\nabla f(1,-1) = \left(2 \cdot 1(-1)^2 - 2, 2 \cdot (-1) \cdot 1^2\right) = (2-2, -2) = (0,-2)$$

$$|\nabla f(1,-1)| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\vec{l_0} = + \frac{(0,-2)}{2} = (0,-1), \quad \boxed{\vec{l_0} = (0,-1)}$$

$$\max_{\vec{l_0}} \frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}(x,y) = |\nabla f|, \quad \min_{\vec{l_0}} \frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}} = -|\nabla f|$$