



Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka



PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.Z106)
STUDIJSKI PROGRAM: GT, ZR, ZU

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Diferencijalne jednačine prvog reda
Jednačina koja razdvaja promenljive, Homogena jednačina

Radna nedelja br. 8

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

PRIMER REŠITI DIFERENCIJALNU JEDNAČINU

$$2e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dx + (1 + 2e^{\frac{y}{x}}) dy = 0. \quad /: dx$$

ku.

$$\frac{y}{x} = t \quad \rightarrow \quad y = xt \quad \rightarrow \quad y' = t'x + t$$

$$2e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right) + (1 + 2e^{\frac{y}{x}}) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y' (1 + 2e^{\frac{y}{x}}) = -2e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right)$$

$$t'x + t = -2 \cdot \frac{e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right)}{1 + 2e^{\frac{y}{x}}} = -2 \cdot \frac{e^t \cdot (1 - t)}{1 + 2e^t}$$

$$t'x + t = -2 \frac{e^t (1 - t)}{1 + 2e^t}$$

$$\dots \rightarrow \underline{y + 2xe^{\frac{y}{x}} = C}$$

ОТТЕПЕШ.

Beleške

1. PRIMER REŠITI POČETNI PROBLEM

$$xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}, \quad y(1) = 0$$

Reš.

$$xy' - y = (x + y) \ln \left(1 + \frac{y}{x} \right) \quad / : x$$

$$y' - \frac{y}{x} = \left(1 + \frac{y}{x} \right) \ln \left(1 + \frac{y}{x} \right) \quad \leftarrow \text{HOMOGENA D.J.}$$

$$\frac{y}{x} = t \rightarrow y = tx \rightarrow y' = t'x + t$$

$$t'x + t - t = (1+t) \ln(1+t)$$

$$t'x = (1+t) \ln(1+t)$$

$$\frac{dt}{dx} x = (1+t) \ln(1+t)$$

$$\int \frac{dt}{(1+t) \ln(1+t)} = \int \frac{dx}{x} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{L+ZD.} \\ \text{PRIM} \end{array}$$

$$\int \frac{dt}{(1+t) \ln(1+t)} = \int \frac{dz}{z} = \ln z = \ln(\ln(1+t)) = \ln(\ln(1+t))$$

$$\ln(\ln(1+t)) = \ln x + \ln c = \ln xc$$

$$xc = \ln(1+t) \quad t = \frac{y}{x}$$

$$xc = \ln \left(1 + \frac{y}{x} \right)$$

$$e^{xc} = 1 + \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} = e^{xc} - 1$$

$$y = x e^{xc} - x$$

$$y(1) = 0$$

$$0 = 1 \cdot e^{1 \cdot c} - 1 \Rightarrow e^c = 1$$

$$c = 0$$

$$y = x e^0 - x = 0$$

$y = 0 \in \text{PART. REŠ.}$

OPŠTE REŠ.

1. PRIMER NAČI OPŠTE REŠENJE D.).

$$\frac{y}{x} = t, t(x)$$

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad /: x$$

$$y = tx$$

$$y' = t'x + t$$

reš.

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$t'x + t = \cancel{t} + \sqrt{1 + t^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}$$

$$t'x = \sqrt{1 + t^2}$$

$$\frac{dt}{dx} x = \sqrt{1 + t^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

C

$f\left(\frac{y}{x}\right)$
HOMOGENA D.).

$$\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) = \ln x + \ln C = \ln xC$$

$$\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) = \ln xC$$

$$t + \sqrt{1 + t^2} = x \cdot C$$

$$t = \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = x \cdot C \quad /: x$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 \cdot C$$

OPŠTE
REŠ.

Glava 1

Diferencijalne jednačine

1.1 Opšti pojmovi

Diferencijalne jednačine čine osnovu mnogih matematičkih modela za opisivanje različitih prirodnih pojava koje proučavaju prirodne nauke, ali takođe i problema u mnogim primenjenim naukama.

1.1.1 Klasifikacija i oblici diferencijalnih jednačina

Jednačina koja sadrži nepoznatu funkciju i njene izvode naziva se **diferencijalna jednačina**. Ako nepoznata funkcija zavisi od više promenljivih, onda se radi o **parcijalnoj diferencijalnoj jednačini**, na primer

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y,$$

gde je $z = z(x, y)$ nepoznata funkcija. U slučaju kada nepoznata funkcija zavisi samo od jedne promenljive govorimo o **običnoj diferencijalnoj jednačini**, na primer

$$y^{(3)} + 2xy'' + 3y = x^2,$$

gde je $y = y(x)$ nepoznata funkcija. **Red diferencijalne jednačine** se definiše kao red najvišeg izvoda koji se javlja u jednačini. Na primer,

$$(x^2 \ln x)y^{(5)} + 5y'' + y \cos x = y^2$$

predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu petog reda.

U daljem radu bavićemo se isključivo običnim diferencijalnim jednačinama.

1.2 Diferencijale jednačine prvog reda

Jednačina oblika

$$F(x, y, y') = 0$$

se naziva **opšti oblik obične diferencijalne jednačine prvog reda**. Ako se ova jednačina može rešiti po y' , onda dobijamo **normalni oblik diferencijalne jednačine prvog reda**

$$y' = f(x, y).$$

Svaka funkcija $y = \phi(x)$ koja je definisana i diferencijabilna u nekoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}$ i koja zadovoljava jednačinu

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0,$$

odnosno

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)),$$

za svako $x \in D$, naziva se **rešenje diferencijalne jednačine**.

Sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza, definiše dovoljne uslove za egzistenciju i jedinstvenost rešenja diferencijalne jednačine.

Teorema 1 (Picard-ova teorema) *Ako su diferencijalnoj jednačini $y' = f(x, y)$ funkcije $f(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ definisane i neprekidne na zatvorenoj oblasti $\Omega = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, koja sadrži tačku (x_0, y_0) , tada postoji jedinstveno rešenje $y = y(x)$ jednačine $y' = f(x, y)$ za koje važi $y(x_0) = y_0$ i koje je neprekidno diferencijabilno po x na intervalu $|x - x_0| \leq h$ za $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, gde je M konstanta koja ograničava funkciju $f(x, y)$ na posmatranoj oblasti Ω .*

$$\eta(x) = ?$$

Dodatni uslov $y(x_0) = y_0$ se naziva **početni uslov** za posmatranu diferencijalnu jednačinu $F(x, y, y') = 0$. Geometrijska interpretacija govori da rešenje $y = y(x)$ prolazi kroz tačku (x_0, y_0) . Početni uslov zajedno sa diferencijalnom jednačinom se zove **početni problem**.

Primer 1 *Odredimo ono rešenje diferencijalne jednačine $y' = 3x^2$ koje prolazi kroz tačku $(1, 2)$ (početni uslov).* $\eta(x) = ?$, $\eta(1) = 2$

Nije teško videti da je $y = x^3$ jedno rešenje date jednačine. Zaista, diferenciranjem ćemo dobiti polaznu jednačinu $y' = 3x^2$. Međutim, svaka nova funkcija oblika $y = x^3 + C$, gde je C proizvoljna konstanta, je takođe rešenje polazne

$$y' = 3x^2 \leadsto \frac{dy}{dx} = 3x^2 \leadsto dy = 3x^2 dx \quad \int \quad \int dy = 3 \int x^2 dx \quad y = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
 poč. problem

$$y(x) = ?$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y = x^3 + C$$

$C = \text{const}$

$$[y(1) = 2]$$

Poč. uslov

$$2 = 1^3 + C \rightarrow C = 1$$

$$y = x^3 + 1$$

DE TRAŽENHO REŠENJE

PARTIKULARNO REŠ.

7

jednačine. Zaista, diferenciranjem dobijamo da je $y' = (x^3 + C)' = 3x^2$. Napominjemo da ćemo rešenje $y = x^3 + C$ kasnije definisati kao opšte rešenje. U geometrijskom smislu, dobili smo familiju krivih koje zadovoljavaju polaznu jednačinu $y' = 3x^2$. Primetimo da samo jedna kriva iz ove familije prolazi kroz datu tačku $(1, 2)$. Za tu specijalnu krivu mora da važi: $2 = 1^3 + C$, odnosno $C = 1$. Dakle, specijalno rešenje koje prolazi kroz datu tačku (početni uslov) ima jednačinu $y = x^3 + 1$. Ovo rešenje ćemo kasnije nazvati partikularno rešenje.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine oblika $F(x, y, y') = 0$ je funkcija $y = \phi(x, C)$ koja zavisi od jednog parametra (konstante) C i za koju važi:

- zadovoljava diferencijalnu jednačinu, tj. $F(x, \phi(x, C), \phi'(x, C)) = 0$ za svako x iz oblasti rešenja D ,
- za svaki početni uslov $(x, y) = (x_0, y_0)$ iz oblasti rešenja, može se jednoznačno odrediti konstanta $C = C_0$ tako da $y = \phi(x, C_0)$ zadovoljava početni uslov, tj. da je $y_0 = \phi(x_0, C_0)$.

Prilikom rešavanja različitih diferencijalnih jednačina nije uvek moguće izraziti opšte rešenje u eksplicitnom obliku $y = \phi(x, C)$, zato opšte rešenje često dobijamo u implicitnom obliku $\Phi(x, y, C) = 0$. Postupak rešavanja diferencijalne jednačine se uglavnom svodi na integraciju, zato rešenje se ponekad naziva **integral diferencijalne jednačine**.

Rešenje koje se dobija iz opšteg rešenja za konkretan izbor konstante $C = C_0$ naziva se **partikularno rešenje**. Dakle, svaki početni uslov definiše jedno partikularno rešenje.

1.2.1 Jednačine koje razdvajaju promenljive

Diferencijalna jednačina oblika

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

gde su $M(x)$ i $N(y)$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom koje zavise samo od x i y , respektivno, naziva se **diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive**. Opšte rešenje ove jednačine se dobija direktnom integracijom

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

$$dy - x dx = 0, \quad N(y) = 1, \quad M(x) = -x$$

Primer 2 Rešiti diferencijalnu jednačinu $\int dy - \int x dx = 0$.

Direktnom integracijom dobijamo sledeću jednačinu koja predstavlja opšte rešenje

$$y - \frac{x^2}{2} = C, \text{ odnosno } y = \frac{x^2}{2} + C, \quad \leftarrow \text{OPS TE REŠENJE}$$

gde je C proizvoljna konstanta. Nije teško videti da ovo opšte rešenje u geometrijskom smislu predstavlja familiju paraboloida sa temenima na y -osi.

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f(x)g(y) \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

takođe pripada klasi koja razdvaja promenljive. Zaista, datu jednačinu možemo transformisati na oblik

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

gde je funkcija $g(y) \neq 0$. Uz pretpostavku da su podintegrale funkcije neprekidne u posmatranoj oblasti, opšte rešenje možemo dobiti direktnom integracijom

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

1.2.2 Homogene jednačine

Diferencijalne jednačine oblika

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

nazivaju se **homogene jednačine**. Neka je $f(t)$ neprekidna funkcija na nekom oblašču $D \subseteq \mathbb{R}$. Uvdođenjem smene

$$t(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = x \cdot t(x),$$

i diferenciranjem poslednje jednakosti dobijamo

$$y' = t + xt'.$$

$$t + xt' = f(t)$$

$$t' = \frac{dt}{dx}$$

$$xt' = f(t) - t \quad \rightarrow \quad x \frac{dt}{dx} = f(t) - t$$

snimak:

$$\frac{y}{x} = t, \quad t = t(x)$$

$$y = t \cdot x$$

$$y' = (t \cdot x)' = t' \cdot x + x' \cdot t = t'x + t$$

$$- \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x} \quad \leftarrow \text{JEDN. KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE}$$

$$\int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x} \quad \dots$$

9

Sada polazna homogena diferencijalna jednačina se svodi na jednačinu sa razdvojenim promenljivama

$$t + xt' = f(t) \Leftrightarrow t' = \frac{f(t)-t}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$$

Uz pretpostavku da je $f(t)-t \neq 0$ nad oblašću D , opšte rešenje možemo dobiti integracijom poslednje jednačine

$$\int \frac{dt}{f(t)-t} = \ln x. \quad \leftarrow (x-y) \cdot y' = (x+y)$$

Primer 3 Rešiti diferencijalnu jednačinu $(x-y)y' = 2(x+y)$.

Datu jednačinu možemo da transformišemo, uz pretpostavku da je $x-y \neq 0$, na sledeći način

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \stackrel{/:x}{\Leftrightarrow} y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \in f\left(\frac{y}{x}\right)$$

što predstavlja homogenu diferencijalnu jednačinu. Uvođenjem predložene smene $t = \frac{y}{x}$, odnosno $y' = t'x + t$, jednačina se svodi na sledeći oblik

$$\frac{y}{x} = t \rightarrow y = tx$$

$$y' = t'x + t$$

$$t' = \frac{dt}{dx} \quad t'x + t = \frac{1+t}{1-t} \Rightarrow \frac{1-t}{1+t^2} dt = \frac{dx}{x}$$

Poslednja jednačina razdvaja promenljive, tako da ćemo je rešavati direktnom integracijom

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-t}{1+t^2} dt \Rightarrow \underbrace{\arctg t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2)}_C = \ln x + \ln C,$$

$$\int \frac{1-t}{1+t^2} dt =$$

primetimo da smo konstantu zamenili sa $\ln C$, što je dozvoljeno jer je kodomen funkcije \ln ceo skup realnih brojeva. Sređivanjem poslednjeg izraza dolazimo do jednačine

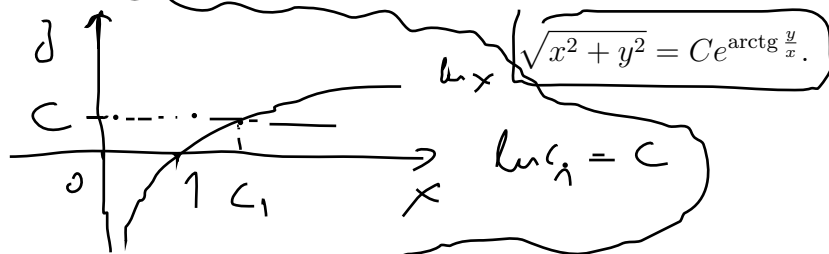
$$\ln \frac{x\sqrt{1+t^2}}{C} = \arctg t,$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{t dt}{1+t^2}$$

$$= \arctg t - \frac{1}{2} \ln z =$$

$$= \arctg t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$$

a traženo opšte rešenje dobijamo vraćanjem smene $t = \frac{y}{x}$



$$\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) = \ln x + \ln c$$

$$\operatorname{arctg} t = \ln x + \ln c + \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$$

$$\operatorname{arctg} t = \ln(x \cdot c) + \ln \sqrt{1+t^2}$$

$$\operatorname{arctg} t = \ln x \cdot c \sqrt{1+t^2}$$

10

$$\operatorname{arctg} t = \ln(x \cdot c \sqrt{1+t^2})$$

$$x \cdot c \cdot \sqrt{1+t^2} = e^{\operatorname{arctg} t}$$

$$t = \frac{y}{x}$$

Ako želimo da posmatramo familiju krivih koju definiše opšte rešenje, vredi preći na polarne koordinate $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$. Tada važi da je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ i } \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

odnosno opšte rešenje u odnosu na polarne koordinate ima oblik

$$r = C e^{\varphi}.$$

Sada je jasno da opšte rešenje predstavlja familiju logaritamskih spirala sa zajedničkom početnom tačkom u koordinatnom početku.

OPŠTE REŠ.

Beleške

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C \cdot e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

$$C = \frac{1}{C}$$

$$C \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

PRIMER.

U AČI OPŠTE REŠENJE D)

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x+1}$$

Reš

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{x+1} \cdot y' \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \int y(x+1) \cdot dx$$

$\rightarrow x(x+1) dx = y dy$ JED KODA RAZBURA DA PROVI.

$$\int x(x+1) dx = \int y dy$$

$$\int (x^2 + x) dx = \int y dy$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\frac{2}{3} x^3 + x^2 = y^2 + 2C$$

$$y^2 = \frac{2}{3} x^3 + x^2 - 2C$$

$$y^2 = \frac{2}{3} x^3 + x^2 + C_1$$

OPŠTE REŠENJE

Beleške

PRIMER (MALTUSOV ZAKON RASTA POPULACIJE)

$N(t)$ - BROJ JEDINKE POSMATRANE POPULACIJE U
 TREKUTKOM t

$N(t_0) = N_0$ - POČETNI USLOV (OPISUJE STANJE
 U POČETNOM TREKUTKU)

"VELIČINA PROMENE POPULACIJE SKAZMERNA JE BROJU JEDINKE."

$$\boxed{N'(t) = k \cdot N(t)}$$
 , k - KONSTANTA (ODLIKA POPULACIJE)

↑

MALTUSOV ZAKON RASTA POPULACIJE

$$\ln N = k \cdot t + C$$

$$N' = k \cdot N \quad (\text{RAZD. PROM.})$$

$$N = e^{k \cdot t + C} = \underbrace{e^C}_C \cdot e^{k \cdot t}$$

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

$$N(t) = C \cdot e^{k \cdot t} \quad \leftarrow \text{OPŠTE REŠENJE}$$

$$N(t_0) = N_0$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int k \cdot dt$$

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{k \cdot (t - t_0)}} \quad N_0 = C e^{k \cdot t_0} \Rightarrow C = N_0 e^{-k \cdot t_0}$$