Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Linearna i Bernulijeva diferencijalna jednačina
Jednačina totalnog diferencijala

Radna nedelja br. 9

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

$y' = f(x)$

$y = ?$

$y = y(x)$

$x \in [a, b]$

$y(a) =$

$y(b) =$

$y(x_0) = C_0 \,, \quad C_0 \in \mathbb{R}$

POČETNI USLOV

$y = F(x) + C_1$

PARTIKULARNO REŠENJE

$\frac{dy}{dx} = f(x) \longrightarrow dy = f(x)\,dx \quad / \int$

$y = \int dy = \int f(x)\,dx = F(x) + C$ OPŠTE REŠ.

$y = F(x) + C$

HOMOGENA D.J.

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \longrightarrow \frac{y}{x} = t \,, \quad t = t(x)$

$y = tx \rightarrow y' = t'x + t \cdot x' =$

$= t'x + t$

$t'x + t = f(t)$

$t' = \frac{dt}{dx}$

PRIMER NAĐI OPŠTE REŠENJE D.J.

$$y' + y + x = 0 .$$

REŠ. LINEARNA D.J. $\longrightarrow$ $y = u \cdot v$, $u = u(x) = ?$ $v = v(x) = ?$

$\begin{bmatrix} f(x) = 1 \\ g(x) = -x \end{bmatrix}$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u'v + uv' + uv + x = 0$$

$$u'v + u(v' + v) = -x$$

P.P. $v' + v = 0$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\frac{dv}{v} = -dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int dx$$

$$\ln v = -x$$

$$\boxed{v = e^{-x}}$$

$$u' \cdot e^{-x} + u \cdot 0 = -x$$

$$u' \cdot e^{-x} = -x$$

$$\frac{du}{dx} = -x e^{x}$$

$$du = -x e^{x} dx$$

$$\int du = -\int x e^{x} dx$$

$$u = -\int x e^{x} dx$$

$$\int x e^{x} dx = x e^{x} - \int e^{x} dx =$$

$u_1 = x$ $\quad dv_1 = e^{x} dx$

$du_1 = dx$ $\quad v_1 = e^{x}$

$$= x e^{x} - e^{x} = e^{x}(x-1)$$

$$u = -e^{x}(x-1) + C$$

$$u = e^{x}(1-x) + C$$

$$y = u \cdot v = \left(e^{x}(1-x) + C\right) \cdot e^{-x}$$

$$= (1-x) + Ce^{-x}$$ OPŠTE REŠENJE

$6 = x \cdot y$

$y = \frac{6}{x} \quad x \neq 0$

0.0.1 Linearna diferencijalna jednačina

Opšti oblik **linearne diferencijalne jednačine** je

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x),}$$

$y = y(x) = ?$

gde se nepoznata funkcija $y(x)$ i njen izvod y' pojavljuju samo u linearnoj formi, tj. stepenovani su samo prvim stepenom. Pretpostavićemo da su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne na nekom intervalu $D \subseteq \mathbb{R}$.

Ideja nalaženja opšteg rešenja je da se opšte rešenje predstavi u obliku proizvoda dve nove i nepoznate funkcije. To omogućava da jednu od te dve funkcije odredimo nametanjem dodatnog specijalnog uslova. Na takav način ćemo dobiti dve jednačine sa razdvajanjem promenljivih, koje znamo da rešimo.

Opšte rešenje ćemo zameniti proizvodom dve nepoznate i diferencijabilne funkcije na intervalu D $u(x)$ i $v(x)$, tj. uvešćemo smenu

SMENA: $$\boxed{y(x) = u(x)v(x)} \Rightarrow \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Zamenom ove smene u polaznu jednačinu, dobićemo

$$u'v + uv' + f(x)uv = g(x),$$

odnosno, izvlačenjem u kao zajedničkog faktora, imaćemo

$$u'v + u(v' + f(x)v) = g(x). \tag{1}$$

Funkciju v ćemo odrediti uvođenjem specijalnog uslova koji podrazumeva izjednačavanje izraza u zagradi sa nulom, tj.

$$v' + f(x)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -f(x)dx,$$

što daje jednačinu koja razdvaja promenljive. Rešavanjem ove jednačine, dobićemo

$$v(x) = e^{-\int f(x)dx}.$$

Ubacivanjem ovako dobijenog rešenja za v u jednačinu (1), dobićemo $u'v = g(x)$, odnosno

$$u'e^{-\int f(x)dx} = g(x) \quad \Rightarrow \quad du = e^{\int f(x)dx} g(x)\, dx,$$

$u' = \frac{du}{dx}$

$u = \int \quad dx$

što predstavlja jednačinu koja razdvaja promenljive. Rešavanjem ove jednačine dobićemo drugu nepoznatu funkciju, tj.

$$u(x) = \int e^{\int f(x)dx} g(x)\, dx + C.$$

Sada smo u mogućnosti da odredimo opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine

$$y(x) = u(x)v(x) = \left(\int e^{\int f(x)dx} g(x)\, dx + C \right) \cdot e^{-\int f(x)dx}.$$

Primer 1 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y' + f(x)\, y = g(x)$

$$y' + \frac{y}{x} = x^3.$$ $f(x) = \frac{1}{x}\,,\ g(x) = x^3$

Primetimo da se radi o linearnoj difrencijalnoj jednačini, gde su $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = x^3$. Tražićemo opšte rešenje na intervalu $x > 0$, jer zbog definisanosti funkcije $f(x)$ mora biti $x \neq 0$. Uvođenjem smene

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv',$$

polazna jednačina se svodi na $u'v + uv' + uv \cdot \frac{1}{x} = x^3$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^3.$$

Izjednačavanjem izraza u zagradi sa nulom, dobićemo

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$ $\Rightarrow \ln v = -\ln x$

$\ln v = \ln \frac{1}{x}$

odnosno, dobićemo prvu nepoznatu funkciju

$$v = \frac{1}{x}.$$ $v = \frac{1}{x}$

Ubacivanjem dobijene funkcije $v(x)$ u polaznu jednačinu, sledi

$$\frac{u'}{x} = x^3 \quad \Leftrightarrow \int du = \int x^4 dx.$$

Integracijom poslednje jednačine, lako dobijamo drugu nepoznatu funkciju

$$u(x) = \frac{x^5}{5} + C.$$

$u \cdot v = \left(\frac{x^5}{5} + C\right) \cdot \frac{1}{x}$

Opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine je

$$y(x) = u(x)v(x) = \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}.$$

LIN $\to$ $y' + f(x)y = g(x)$

$y = y(x)$

0.0.2 Bernulijeva diferencijalna jednačina

Jednačina ovog tipa ima sledeći opšti oblik

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Q}.}$$

$y = ?$

Primetimo da za $\alpha = 0$ jednačina se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu, a za $\alpha = 1$ ona se svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive:

$$\frac{dy}{y} = (g(x) - f(x))dx.$$

Zato ćemo u nastavku posmatrati slučaj kada je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$.

Jednačina ovog tipa se može svesti na linearnu jednačinu pomoću smene

$$\boxed{z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}}} \Rightarrow \quad z'(x) = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}.$$

$z = z(x)$

Zaista, ako podelimo datu jednačinu sa y^{α} $(y(x) \neq 0)$, dobićemo

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + f(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = g(x),$$

odnosno ubacivanjem predložene smene, dobijamo jednačinu

$$(1-\alpha) \quad / \qquad \boxed{\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = g(x).}$$

$\Rightarrow z' + f(x)(1-\alpha)z = (1-\alpha)g(x)$

Ova jednačina je linearnog tipa po nepoznatoj funkciji $z(x)$, koja se može rešiti uvođenjem smene $z(x) = u(x)v(x)$. Na kraju, u tako dobijeno rešenje je potrebno vratiti početnu, odnosno staru promenljivu pomoću smene $z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$.

$z = z(x)$ $\qquad z(x) = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$ $\qquad y^{\alpha-1} = \dfrac{1}{z(x)}$

0.0.3 Diferencijalna jednačina totalnog diferencijala

$y(x) = ?$

Diferencijalna jednačina oblika

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{2}$$

gde su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ funkcije dve promenljive, je **jednačina totalnog diferencijala** ako postoji diferencijabilna funkcija dve nezavisne promenljive $u(x,y)$, tako da važi

$$(a)\ \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \ \text{ i } \ (b)\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

$u(x,y)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

TOT. DIF. FUNKCIJE u

$d/$ $\qquad u(x,y) = C$ $\to$ $du = 0$

OPŠTE REŠENJE

$u(x,y) = ?$

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Tada za totalni diferencijal funkcije $u(x, y)$ važi

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

što znači da polaznu diferencijalnu jednačinu (2) možemo napisati u obliku $du = 0$. Iz toga sledi da traženo opšte rešenje možemo prikazati u obliku

$$\boxed{u(x, y) = C.}$$

Postavlja se pitanje pod kojim uslovima je jednačina oblika (2) ujedno i jednačina totalnog diferencijala, odnosno kada postoji funkcija $u(x, y)$ koja zadovoljava uslove (a) i (b)? Na ovo pitanje odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 1 *Neka su $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ neprekidne funkcije nad nekom oblašću $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada je diferencijalna jednačina (2) jednačina totalnog diferencijala ako i samo ako je*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \tag{3}$$

za svako $(x, y) \in \Omega$.

Dokaz. Pokažimo da je uslov (3) je potreban. Pretpostavimo da postoji funkcija $u(x, y)$ tako da važe jednakosti $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ i $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Diferenciranjem dobijamo $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, pa uslov (3) sledi, jer je $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ na osnovu pretpostavke o neprekidnosti parcijalnih izvoda.

Pokažimo sada da je uslov (3) dovoljan. Neka je (x_0, y_0) jedna fiksirana tačka iz oblasti Ω, a (x, y) proizvoljna tačke iz te oblasti. Definišimo funkciju $u(x, y)$ na sledeći način

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt.$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt$$

Tada, primenom parcijalnih izvoda na funkciju $u(x, y)$ i uzimajući u obzir da važi uslov $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= Q(x,y) \text{ i} \qquad \left(\int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt\right)'_y = Q(x,y) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dt = P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} dt \\
&= P(x,y_0) + P(x,t)\Big|_{y_0}^{y} = \cancel{P(x,y_0)} + P(x,y) - \cancel{P(x,y_0)} \\
&= P(x,y).
\end{aligned}$$

$u(x,y) =$

Time je pokazano da je uslov i dovoljan. □

Postavlja se pitanje kako odrediti funkciju $u(x, y)$, a samim tim naći opšte rešenje, za datu diferencijalnu jednačinu totalnog diferencijala.

Kako je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, to se integracijom funkcije $P(x, y)$ po promenljivoj x dobija

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y), \qquad \left(\ \right)'_x \tag{4}$$

$\varphi(y) = ?$

gde funkcija $\varphi(y)$ zavisi samo od promenljive y. Koristeći drugi uslov $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ i dobijeni oblik funkcije $u(x, y)$ (4), možemo napisati sledeću diferencijalnu jednačinu po y-u:

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx + \varphi'(y).$$

Rešavanjem ove jednačine određuje se nepoznata funkcija $\varphi(y)$, a time je određena i tražena funkcija $u(x, y)$.

$u(x,y) =$

PRIMER REŠITI D.J.

$$(2xy-3y)dx+(x^2-3x)dy=0.$$

Reš. $\underbrace{}_{\parallel \; P(x,y)}$ $\quad \underbrace{}_{\parallel \; Q(x,y)}$

$$\begin{aligned}u(x,y)&=x^2y-3xy\\ \frac{\partial u}{\partial x}&=2xy-3y\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=x^2-3x\end{aligned}$$

- $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-3 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x-3 \quad \Rightarrow$ JEDN. TOT. DIF. $\Downarrow$ POSTOJI $u(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)\ \wedge\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

- ODREDIMO FUNK. $u(x,y)$

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2xy-3y \longrightarrow u(x,y)=\int(2xy-3y)dx=$

$$=\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\cdot y-3y\cdot x+\varphi(y)$$

$$=x^2\cdot y-3xy+\varphi(y)$$

$$u(x,y)=x^2\cdot y-3xy+\varphi(y)$$

$\varphi(y)=?$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=x^2-3x$

$$\cancel{x^2}-\cancel{3x}+\varphi'(y)=\cancel{x^2}-\cancel{3x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^2y-3xy+\varphi(y)\right)'_y=x^2-3x+\varphi'(y)$$

$$\varphi'(y)=0$$

$$\frac{d\varphi}{dy}=0$$

$$d\varphi=0 \Rightarrow \boxed{\varphi(y)=C}$$

OPŠTE REŠ.

$$\boxed{u(x,y)=x^2y-3xy+C} \qquad \boxed{u(x,y)=0}$$

$\boxed{x^2 y - 3x y = C}$

0.1 Zadaci za vežbanje

0.1.1 Linearna diferencijalna jednačina

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - \dfrac{2}{x+1}\,y = (x+1)^3$.

Rešenje: Jednačina je linearna, odnosno oblika $y' + f(x)\cdot y = g(x)$. Uvođenjem smene:

$f(x) = -\dfrac{2}{x+1}$, $g(x) = (x+1)^3$

$$y = u\cdot v,\ u = u(x),\ v = v(x) \quad\Rightarrow\quad y' = u'\cdot v + u\cdot v',$$

polazna jednačina postaje

$$\begin{aligned} u'\cdot v + u\cdot v' - \frac{2}{x+1}\,u\cdot v &= (x+1)^3 \\ u'\cdot v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}\,v\right) &= (x+1)^3. \end{aligned}$$

Funkciju v biramo tako da važi $v' - \dfrac{2}{x+1}\cdot v = 0$, odakle sledi

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{2}{x+1}\,v \\ \frac{dv}{v} &= \frac{2}{x+1}\,dx \\ \ln v &= 2\ln|x+1| \ \Rightarrow\ v = (x+1)^2. \end{aligned}$$

Koristeći postavljeni uslov i izračunatu vrednost funkcije v određujemo funkciju u

$$\begin{aligned} u'\cdot v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}\,v\right) &= (x+1)^3 \ \Rightarrow \\ u'\cdot \cancel{(x+1)^2} + u\cdot 0 &= (x+1)^{\cancel{3}\ 1} \end{aligned}$$

$u' = x+1$

$$\frac{du}{dx} = x+1 \quad\Rightarrow\quad du = (x+1)\,dx$$

$$\Rightarrow u = \int (x+1)\,dx \quad\Rightarrow \boxed{u = \frac{x^2}{2} + x + C.}$$

$y = u\cdot v$

Sada je opšte rešenje

$$y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2.$$

$y = y(x)$

2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(1+y^2)\ dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)\ dy.$$

$\boxed{x = x(y)}$

Rešenje: S obzirom da je ova jednačina linearna po x, a ne po y, svešćemo je na oblik $x' + f(y) \cdot x + g(y) = 0$, odnosno imamo

$$\begin{aligned}
(1+y^2)\ dx &= (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)\ dy \qquad / : (dy(1+y^2)) \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{\cancel{\sqrt{1+y^2}}\sin y}{\cancel{1+y^2}} - \frac{xy}{1+y^2} \\
\boxed{x' + x \cdot \underbrace{\frac{y}{1+y^2}}_{f(y)} = \underbrace{\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}}_{g(y)}} &\quad \Rightarrow \quad x = x(y).
\end{aligned}$$

LINEARNA D.J.

Uvodimo smenu $\boxed{x = u \cdot v} \Rightarrow x' = u' \cdot v + u \cdot v'$, pri čemu su sada u i v funkcije koje zavise od y, tj. $u = u(y)$ i $v = v(y)$, pa dobijamo

$$\begin{aligned}
u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v \cdot \frac{y}{1+y^2} &= \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \\
u' \cdot v + u \cdot \left(v' + v \cdot \frac{y}{1+y^2}\right) &= \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Postavljanjem uslova $v' + v \cdot \dfrac{y}{1+y^2} = 0$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dy} &= -\frac{vy}{1+y^2} \\
\frac{dv}{v} &= -\frac{y}{1+y^2}\ dy \\
\ln v &= -\int \frac{y\ dy}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Smenom $1 + y^2 = t \ \Rightarrow y\ dy = \dfrac{dt}{2}$, poslednji integral postaje

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

$u = u(y)$, $v = v(y)$

Dakle, odredili smo funkciju $\boxed{v = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}}$. Izračunajmo sada funkciju u, uvrštavajući dobijeno v i gore postavljeni uslov u (5)

$$u' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \quad \Rightarrow \quad du = \sin y \; dy,$$

odakle je $\boxed{u = -\cos y + C}$. Vratimo smenu $x = u \cdot v$ i dobijamo rešenje početne diferencijalne jednačine

$x = u \cdot v$

$$\boxed{x = (-\cos y + C) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.}$$

0.1.2 Bernulijeva diferencijalna jednačina

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

$y^\alpha = y^3$

Rešenje: Ovo je jednačina oblika $y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$, odnosno Bernilijeva jednačina, gde je prvi korak u rešavanju množenje sa $y^{-\alpha}$. Konkretno, u jednačini iz zadatka množimo sa y^{-3}, pa uvodimo smenu $\boxed{z = y^{-2}} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$, odakle imamo $y^{-3}y' = -\dfrac{z'}{2}$, odnosno

$\alpha = 3$

$z = y^{1-\alpha} = y^{1-3} = y^{-2}$

$z' = -2y^{-3} \cdot y'$

$/ y^3$

$$\begin{aligned} y' + 2xy = 2x^3y^3 \quad &\Rightarrow \quad y^{-3}y' + 2xy^{-2} = 2x^3 \\ &\Rightarrow \quad -\frac{z'}{2} + 2xz = 2x^3 \qquad / \cdot 2 \\ & \quad z' - 4xz = -4x^3. \end{aligned}$$

Sada smo dobili linearnu jednačinu koju rešavamo smenom $z = u \cdot v \Rightarrow z' = u' \cdot v + u \cdot v'$, odakle je

$$\begin{aligned} z' - 4xz = -4x^3 \quad &\Rightarrow \quad u' \cdot v + u \cdot v' - 4x \cdot u \cdot v = -4x^3 \\ & \quad u' \cdot v + u(v' - 4xv) = -4x^3. \end{aligned}$$

Odredimo funkciju v:

$$\begin{aligned} v' - 4xv = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = 4xv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = 4x\,dx \\ &\Rightarrow \quad \ln v = 2x^2 \quad \Rightarrow \boxed{v = e^{2x^2}.} \end{aligned}$$

Odredimo funkciju u:

$$u'\cdot v + u(v' - 4xv) = -4x^3 \;\Rightarrow\; u'\cdot e^{2x^2} = -4x^3$$
$$du = -4x^3\cdot e^{-2x^2}\,dx$$

$$\begin{aligned} u &= \int x^2\cdot e^{-2x^2}\cdot(-4x)\,dx \\ &\left[\begin{array}{ll}\text{Smena}: & -2x^2 = t \\ & -4x\,dx = dt\end{array}\right] \\ u &= -\frac{1}{2}\int t\cdot e^t\,dt \end{aligned}$$

Poslednji integral se rešava parcijalnom integracijom

$$\left(\begin{array}{lll} u_1 = t & \Rightarrow & du_1 = dt \\ dv_1 = e^t\,dt & \Rightarrow & v_1 = e^t \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad u &= -\frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t\,dt\right) \\ &= -\frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}e^t + C \\ &= -\frac{1}{2}(-2x^2)e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C \\ &= \underline{e^{-2x^2}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) + C.} \end{aligned}$$

Sada je rešenje

$$z = \underline{u\cdot v} = \left(e^{-2x^2}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) + C\right)e^{2x^2} = \underline{x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}},$$

odnosno

$$y = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}}}.$$

$z = y^{-2} \Rightarrow z = \frac{1}{y^2}$

$y^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{z}} = z^{-\frac{1}{2}}$

0.1.3 Jednačina totalnog diferencijala

1) Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0.$$

$P(x,y)$ $Q(x,y)$

Rešenje:
Proverimo da li je ovo jednačina totalnog diferencijala:

$$P(x,y) = 2x^3 - xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2xy$$
$$Q(x,y) = 2y^3 - x^2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy$$

Vidimo da je $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, pa ovo jeste jednačina totalnog diferencijala.

Odredimo funkciju $u(x,y)$ takvu da važi $du = P\,dx + Q\,dy = 0$, tj. $u(x,y) = C$. Imamo

$\int dx$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) &= \int P(x,y)\,dx + \psi(y) \\
&= \int (2x^3 - xy^2)\,dx + \psi(y) \\
&= \cancel{2}\cdot \frac{x^4}{\cancel{4}\ 2} - \frac{x^2}{2}\cdot y^2 + \psi(y) \\
&= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + \psi(y).
\end{aligned}$$

$\psi(y) = ?$

Otuda je

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 \cdot 2y + \psi'(y) = -x^2y + \psi'(y),$$

$Q(x,y) = 2y^3 - x^2y$

pa kad ovo izjednačimo sa $Q(x,y)$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\cancel{-x^2y} + \psi'(y) = 2y^3 \cancel{- x^2y} \quad &\Rightarrow \quad \psi'(y) = 2y^3 \\
& \quad \psi(y) = \int 2y^3\,dy = \cancel{2}\cdot\frac{y^4}{\cancel{4}\ 2} \\
&\Rightarrow \quad \psi(y) = \frac{1}{2}y^4.
\end{aligned}$$

$\varphi(y)$

Sada za funkciju $u(x, y)$ imamo

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4 = C, \qquad / \cdot 2$$

te je opšte rešenje date jednačine

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = 2C.$$

PRIMER. NAĆI OPŠTE REŠENJE D.J

$$\underbrace{(3x^2y - 3y^2)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(x^3 - 6xy)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

$u(x,y) = x^3y - 3xy^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - 3y^2$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 6xy$

Reš.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - 6y$$

$$\| \checkmark \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - 6y$$

POSTOJI FUNKCIJA $u(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

$u(x,y) = ?$

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - 3y^2 \Rightarrow u(x,y) = \int (3x^2y - 3y^2)\,dx = \frac{3x^3}{3}y - 3y^2x + \varphi(y)$

2) $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 6xy \longrightarrow \cancel{x^3 - 6yx} + \varphi'(y) = \cancel{x^3 - 6xy}$

$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3y - 3y^2x + \varphi(y))'_y = x^3 - 6yx + \varphi'(y)$$

$$\boxed{u(x,y) = x^3y - 3y^2x + C} \qquad \boxed{x^3y - 3y^2x = C}$$

OPŠTE REŠ.

PRIMER NAĐI OPŠTE REŠENJE D.J.

$$xy' + y = y^2 \ln x \quad / : x$$

REŠ.

$$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} y = \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{g(x)} y^2 \quad \leftarrow \text{BERNULIJEVA D.J.} \qquad \alpha = 2$$

$$t = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y} \rightarrow t' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \quad \ldots$$

II NAČIN $\quad y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, KAO LINEARNA

$v = ?$

$$x(u'v + uv') + u \cdot v = (uv)^2 \ln x$$

$$xu'v + xuv' + uv = u^2 v^2 \ln x$$

$$xu'v + u(xv' + v) = u^2 v^2 \ln x$$

P.P. $\quad xv' + v = 0$

$$x \frac{dv}{dx} = -v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln v = -\ln x$$

$$\ln v = \ln \frac{1}{x} \rightarrow \boxed{v = \frac{1}{x}}$$

$$\rightarrow \cancel{x} u' \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + 0 = u^2 \cdot \frac{1}{x^2} \ln x$$

$$u' = u^2 \frac{1}{x} \ln x$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{1}{x} \cancel{dx} \ln x \, \cancel{dx}$$

$$\therefore \quad u = \frac{x}{\ln x + 1 + Cx}$$

$$y = u \cdot v = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$$