Univerzitet u Novom Sadu

Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Diferencijalne jednačine višeg reda
Snižavanje reda diferencijalnih jednačina
Linearne diferencijalne jednačine višeg reda
Homogene linearne d.j. višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Radna nedelja br. 10

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

Beleške

0.1 Diferencijalne jednačine višeg reda

Opšti oblik diferencijalne jednačine n-tog reda se može zapisati u sledećem obliku

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad y = y(x) = ? \tag{1}$$

ili, ako se može rešiti po $y^{(n)}$, dobijamo **normalni oblik jednačine n-tog reda**

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine n-tog reda na nekom intervalu $D \subseteq \mathbb{R}$ naziva se ona funkcija $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, gde su $C_1, C_2, \dots, C_n$ realne konstante, koja zadovoljava sledeće uslove:

a) Funkcija φ zadovoljava diferencijalnu jednačinu (1), odnosno (2), za proizvoljne konstante $C_1, C_2, \dots, C_n$, tj.

$$F(x, \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, \varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n)) = 0,$$

odnosno

$$\varphi^{(n)}(x, C_1, \dots, C_n) = f(x, \varphi(x, C_1, \dots, C_n), \dots, \varphi^{(n-1)}(x, C_1, \dots, C_n)).$$

b) Za proizvoljan **početni uslov**

$$y(x_0) = A_0,\ y'(x_0) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1},$$

gde su $x_0 \in D$, a $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ zadati realni brojevi, mogu se jednoznačno odrediti konstante

$$(C_1, C_2, \dots, C_n) = (C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}),$$

tako da funkcija $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0})$ zadovoljava početni uslov. Ovo rešenje se naziva **partikularno rešenje**.

Pod pojmom **početni problem** podrazumevamo diferencijalnu jednačinu zajedno sa zadatim početnim uslovom.

U ZAVISNOSTI OD OSOBINA D.J. I MOŽE SE DESITI DA POSTOJI REŠENJE KOJE SE NE MOŽE DOBITI IZ OPŠTEG REŠENJA NI ZA JEDAN IZBOR KONSTANTI $C_1, C_2, \dots, C_n$. TAKVO REŠ. NAZIVAMO SINGULARNO REŠ.

0.1.1 Snižavanje reda diferencijalnih jednačina

Određeni tipovi diferencijalnih jednačina višeg reda mogu se rešiti metodom snižavanja reda, tj. rešavanjem odgovarajućih diferencijalnih jednačina nižeg reda. U nastavku ćemo razmotriti tri različita slučaja primene ove metode.

Slučaj 1. Diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)} = f(x),$$

gde funkcija $f(x)$ zavisi samo od x, može se rešiti **direktnom integracijom**

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1, \;\; y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}(x)dx + C_2, \ldots$$

Primer 1 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y''' = \cos x$.

Direktnom integracijom jednačine dobijamo

$$\int y''' dx = y'' + C$$

$$y'' = \int \cos x \, dx = \sin x + C_1,$$

$$y' = \int (\sin x + C_1) \, dx = -\cos x + xC_1 + C_2,$$

odnosno, za opšte rešenje dobijamo

$$y = \int (-\cos x + xC_1 + C_2) \, dx = -\sin x + \frac{x^2}{2}C_1 + xC_2 + C_3. \quad = y(x)$$

Slučaj 2. Diferencijalna jednačina oblika

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

gde je $1 \leq k < n$, tj. **jednačina ne sadrži nepoznatu funkciju** y, rešava se smenom

$$y^{(k)} = p, \;\; p = p(x).$$

Diferenciranjem jednačine smene, dobija se

$$y^{(k+1)} = p', \;\; y^{(k+2)} = p'', \ldots, y^{(n)} = p^{(n-k)},$$

PRIMER. NAĆI OPŠTE REŠ. $y''(x^2+1) = 2xy'$. "NE SADRŽI y" SL. 2

SMENA: $\boxed{y' = p}$, $p = p(x)$, $\rightarrow y'' = p'$

$p'(x^2+1) = 2x \cdot p \rightarrow \frac{dp}{dx}(x^2+1) = 2xp \rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$

$\ln p = \ln(x^2+1) + C$ "$\ln C_1$"

$\ln p = \ln(x^2+1) + \ln C_1$

$\ln p = \ln(C_1(x^2+1))$

$p = C_1(x^2+1)$

$y' = C_1(x^2+1)$

$\frac{dy}{dx} = C_1(x^2+1)$

$dy = C_1(x^2+1)dx$

$y = C_1\left(\frac{x^3}{3}+x\right) + C_2$

što zamenom u polaznu jednačinu vodi do jednačine

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Očigledno, dobijena diferencijalna jednačina je nižeg reda u odnosu na polaznu i shodno tome, jednostavnija za dalje rešavanje.

Slučaj 3. Diferencijalna jednačina oblika

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

$y = y(x) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$

koja ne sadrži promenljivu x, rešava se uvođenjem sledeće smene

$$\boxed{y' = p, \quad p = p(y).}$$

Pošto smo pretpostavili da je p funkcija od y, izvode višeg reda u polaznoj jednačini možemo izraziti na sledeći način

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = p'_y p,$$

$\frac{dy}{dx} = y' = p$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\frac{dy}{dx} = (p''_y p + (p'_y)^2)p,$$

$\frac{dy''}{dy} = (p'_y\, p)'_y = p'' \cdot p + p' \cdot p' = p''_y \cdot p + (p'_y)^2$

$y^{N} = \frac{dy^{N-1}}{dx} = \ldots$

nastavljajući na sličan način, možemo izraziti i ostale izvode u funkciji od p. Zamenjujući ovako dobijene izvode u datu jednačinu dobićemo novu diferencijalnu jednačinu sa nepoznatom funkcijom $p = p(y)$, koja je istog tipa kao i polazna jednačna ali joj je red smanjen za jedan.

$F(y, p, p'p, (p''p + p'^2)\cdot p, \ldots) = 0$

$p(y) = ?$

PRIMER NAĆI OPŠTE REŠ. D.J. $y'' = \frac{y'^2}{y}$. "JEDN. NE SADRŽI x" 3^o

REŠ. SMENA $y' = p$, $p = p(y)$

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot y' = p'\cdot p = p'_y \cdot p$

$$p' \cdot p = \frac{p^2}{y} \iff p' \cdot p - \frac{p^2}{y} = 0 \iff p\left(p' - \frac{p}{y}\right) = 0$$

$$\iff p = 0 \quad \vee \quad p' - \frac{p}{y} = 0$$

$$y' = 0 \Rightarrow \boxed{y = C}$$

SINGULARNO REŠ., JER GA NE MOŽEMO DOBITI IZ OPŠTEG REŠ. (ZA $C<0$)

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = 0 \iff \frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln p = \ln y + \ln C_1 = \ln(y C_1)$$

$$p = y \cdot C_1$$

$y' = p$

$$y' = y \cdot C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = y\, C_1 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int C_1\, dx$$

$$\ln y = C_1 x + C_2$$

$$y = e^{C_1 x + C_2} = e^{C_1 x} \cdot \underbrace{e^{C_2}}_{C_2^*}$$

$$y = e^{C_1 x} \cdot C_2^*$$

C_1, C_2^* KONSTANTE

OPŠTE REŠ.

$C_2^* > 0$

$$C_1 = 0 \longrightarrow y = C_2^*$$

Beleške

Beleške

0.2 Linearne diferencijalne jednačine višeg reda

Diferencijalna jednačina oblika

$y = y(x) = ?$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (3)$$

gde je $n \geq 2$, a $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ i $f(x)$ su neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D \subseteq \mathbb{R}$, naziva se **linearna diferencijalna jednačina n-tog reda**. Primetimo da nepoznata funkcija y i svi njeni prvi izvodi pojavljuju se kao linearni elementi u jednačini, tj. stepenovani su prvim stepenom. Naziv jednačine želi iskazati upravo ovu činjenicu.

Ako se u jednačini (3) $f(x) = 0$ za svako $x \in D$, onda se ona naziva **homogena linearna diferencijalna jednačina.**

Egzistenciju rešenja jednačine (3) garantuje sledeća Košijeva teorema, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 1 *Ako su $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ i $f(x)$ neprekidne funkcije nad otvorenim intervalom D, tada postoji jednistveno rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine (3), definisano nad D, koje zadovoljava sledeći početni uslov*

$$y(x_0) = A_0,\ y'(x_0) = A_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1},$$

gde su $x_0 \in D$, a $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ proizvoljni realni brojevi.

0.2.1 Homogene linearne jednačine višeg reda

Posmatrajmo homogenu linearnu difrencijalnu jednačinu n-tog reda

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (4)$$

Ako definišemo operator $L_n[y]$ kao levu stranu homogene jednačine, tj.

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y,$$

tada jednačinu (4) možemo zapisati i u obliku

$$L_n[y] = 0.$$

Lako se može dokazati da je operator $L_n[y]$ linearan, tj. da važe uslovi linearnosti

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2] \quad \text{i} \quad L_n[\alpha y] = \alpha L_n[y],$$

gde je α proizvoljna konstanta.

Teorema 2 *Neka su $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, rešenja homogene diferencijalne jednačine (4). Tada je funkcija oblika*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{5}$$

gde su C_i proizvoljne konstante, takođe rešenje jednačine (4).

Dokaz. Pošto su funkcije $y_i(x)$ rešenja homogene jednačine, to za njih važi da je $L_n[y_i] = 0$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$. Sada na osnovu linearnosti operatora L_n, za funkciju $y(x)$ možemo pisati

$$L_n[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)] = C_1 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{L_n[y_1]}} + C_2 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{L_n[y_2]}} + \ldots + C_n \overset{0}{\overset{\shortparallel}{L_n[y_n]}} = 0,$$

odnosno

$$L_n[y] = 0.$$

Iz ove jednačine sledi da je funkcija $y(x)$ takođe rešenje polazne homogene jednačine (4), što je i trebalo dokazati. $\square$

Definicija 1 *(Linearna zavisnost i nezavisnost funkcija) Za funkcije $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ kažemo da su* **linearno zavisne** *nad intervalom $D \subseteq \mathbb{R}$, ako postoje realni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je za svako $x \in D$ važi*

$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\alpha_1}(-\alpha_2 f_2 - \alpha_3 f_3 \ldots)$

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) = 0. \tag{6}$$

Za skup funkcija $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ koje nisu linearno zavisne nad D, kažemo da su **linerano nezavisne** *nad tim intevalom. Drugim rečima, ako je relacija (6) nad D zadovoljena samo za $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, funkcije $f_i(x)$ su linearno nezavisne.*

U ispitivanju linearne nezavisnosti funkcija, značajnu ulogu ima determinanta Vronskog.

Definicija 2 *Determinanta oblika*

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$W : D \to \mathbb{R}$

$W(x) \in \mathbb{R}$

gde su $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ $(n-1)$-puta neprekidno diferencijabilne funkcije nad intervalom D, se naziva **Vronskijeva determinanta**.

Teorema 3 *Funkcije $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ koje su $(n-1)$-puta neprekidno diferencijabilne nad intrevalom D su linearno nezavisne ako i samo ako postoji x_0 iz D, tako da je $W(x_0) \neq 0$.*

U nastavku ćemo zahtevati da funkcije koje razmatramo budu (partikularna) rešenja homogene diferencijalne jednačine (4). Neka su $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ takve funkcije. Ako su ove funkcije još i linearno nezavisne na posmatranom intervalu, onda kažemo da čine **fundamentalan skup rešenja** homogene jednačine (4).

1) REŠ. HOMOGENE 2) LIN. NEZAVISNE $\Leftrightarrow$ FUND. SKUP REŠENJA

Teorema 4 *(***Formula Ljuvil-Abel***) Neka su funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ rešenja homogene diferencijalne jednačine (4) nad intervalom D, i odgovarajuća determinanta Vronskog različita od nule u nekoj tački $x_0 \in D$, tj. $W(x_0) \neq 0$. Tada za svako x iz D važi*

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}. \tag{7}$$

Dokaz. Zbog jednostavnosti, dokaz ćemo dati samo za slučaj kada je $n = 2$. Posmatrajmo homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ čija su rešenja $y_1 = y_1(x)$ i $y_2 = y_2(x)$. Ova rešenja zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu, dakle važe jednačine

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 \quad \text{i} \cdot (-y_2)$$
$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Množenjem prve jednačine sa $-y_2$, a druge sa y_1 i sabirajući tako dobijene jednačine dolazimo do jednačine

$$(-y_1'' y_2 + y_1 y_2'') + a_1(-y_1' y_2 + y_1 y_2') = 0. \tag{8}$$

Vronskijeva determinanta za funkcije y_1 i y_2 ima sledeći oblik

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1',$$

a prvi izvod

$$W'(x) = y_1y_2'' - y_2y_2''.$$

$W'(x) = \frac{dW}{dx}$

Sada jednačinu (8) možemo zapisati u obliku

$$W'(x) + a_1W(x) = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{dW}{W} = \int -a_1dx.$$

Integracijom gornje diferencijalne jednačine u granicama od x_0 do x_1, imamo

$$\ln W(x)\Big|_{x_0}^{x_1} = \ln \frac{W(x_1)}{W(x_0)} = -\int_{x_0}^{x_1} a_1(x)dx,$$

odnosno, stavljajući x umesto x_1 dobijamo traženu formulu

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}.$$

□

Teorema 5 *Neka je determinanta Vronskog $W(x)$ sastavljena od funkcija $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ koja su rešenja homogene jednačine (4) nad intervalom D. Ako je determinta $W(x)$ različita od nule u nekoj tački x_0 iz D, tj. $W(x_0) \neq 0$, tada je $W(x) \neq 0$ za svako x iz intervala D.*

Dokaz. Na osnovu formule Ljuvil-Abela (7), imamo da je

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt},$$

$e^{-\int_{x_0}^{x_1} a(t)dt} \neq 0$

gde je po pretpostavci teoreme $W(x_0) \neq 0$. Kako je eksponencijalni izraz $e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$ različit od nule za svako x iz D, sledi da je i $W(x)$ različito od nule za svako $x \in D$, što je i trebalo dokazati. □

Iz teorema 3 i 5 lako sledi sleća teorema.

Teorema 6 *Neka je determinanta Vronskog $W(x)$ sastavljena od funkcija $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ koja su linearno nezavisna rešenja homogene jednačine (4) nad intervalom D. Tada je $W(x) \neq 0$ za svako x iz intervala D.*

Sledeća teorema je posebno važna, jer govori o opštem rešenju homogene diferencijalne jednačine n-tog reda.

Teorema 7 *Neka su funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ linearno nezavisna rešenja, nad intervalom D, homogene diferencijalne jednačine*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

gde su $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ neprekidne funkcije nad D. Tada je

$$\boxed{y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,} \tag{9}$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante, opšte rešenje te jednačine nad D.

Dokaz. Na osnovu teoreme 2 sledi da je funkcija (9) rešenje homogene jednačine za svaki izbor konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Da bi funkcija (9) predstavljala opšte rešenje, potrebno je još pokazati da za svaki dati početni uslov

$$y(x_0) = A_0,\ y'(x_0) = A_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1},$$

gde su $x_0 \in D$, a $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ realni brojevi, mogu se jednoznačno odrediti konstante

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n) = (C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}),$$

tako da rešenje (9) zadovoljava početni uslov. Uvrštavajući dati početni uslov u (9) dobićemo sledeći linearni sistem jednačina kvadratnog formata

$$\begin{array}{ccccccc}
C_1y_1(x_0) & + & C_2y_2(x_0) & +\ldots+ & C_ny_n(x_0) & = A_0 \\
C_1y_1'(x_0) & + & C_2y_2'(x_0) & +\ldots+ & C_ny_n'(x_0) & = A_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
C_1y_1^{(n-1)}(x_0) & + & C_2y_2^{(n-1)}(x_0) & +\ldots+ & C_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = A_{n-1},
\end{array}$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ nepoznate sistema. Determinanta ovog sistema D_S je jednaka Vronskijevoj determinanti sastavljenoj od funkcija $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ u tački x_0, dakle možemo pisati

$$D_s = W(x_0) = \begin{vmatrix}
y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\
y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0)
\end{vmatrix}.$$

Na osnovu teoreme 6 sledi da je $W(x_0) \neq 0$, odnosno linearni sistem je određen, a to znači da traženo jedinstveno rešenje postoji. $\square$

0.2.2 Homogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

U ovom odeljku ćemo posmatrati homogenu diferencijalnu jednačinu n-tog reda

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{10}$$

gde su sada $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, odnosno konstante. Na osnovu teoreme 7, za određivanje opšteg rešenja jednačine (10) potrebno je naći n linearno nezavisnih rešenja ove jednačine. Da bismo to postigli, pretpostavićemo da rešenje od (7) možemo izraziti u obliku $\boxed{y = e^{\lambda x}}$, gde je λ nepoznata konstanta. Tada ova funkcija mora da zadovoljava diferencijlanu jednačinu, pa zamenjujući

$$y = e^{\lambda x}, \ \ y' = \lambda e^{\lambda x}, \ \ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

u jednačinu (7), dobićemo

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n) e^{\lambda x} = 0.$$

Kako je $e^{\lambda x} \neq 0$, iz prethodne jednačine sledi

$$\boxed{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0,} \tag{11}$$

koju nazivamo **karakteristična jednačina** za homogenu jednačinu (10). Karakteristična jednačina je polinom n-tog stepena koja ima n korena (nula), računajući i višestruke korene, koje ćemo obeležiti sa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Svaki koren određuje jedno fundamentalno rešenje jednačine (10): $y_i = e^{\lambda_i x}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Razume se da koreni λ_i mogu biti realni ili kompleksni, i u oba slučaja jednostruki ili višestruki. To nas navodi da razlikujemo četiri slučaja u zavisnosti od prirode korena.

Slučaj 1. Ako je λ realan i jednostruki koren karakteristične jednačine (11), onda je odgovarajuće fundamentalno rešenje oblika

$$e^{\lambda x}.$$

Dokaz da na ovakav način dobijamo linearno nezavisna rešenja, tj. fundamentalni skup rešenja, ćemo dati samo u slučaju jednačine drugog reda: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Neka su λ_1 i λ_2 dva različita i realna korena odgovarajuće karatetristične jednačine. Tada su rešenja jednačine formirana na predloženi način oblika $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Vronskijeva determinanta sastavljena od ovih funkcija ima sledeći oblik

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}.$$

Pošto su $e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sledi da je $W(x) \neq 0$ za svako x iz $\mathbb{R}$, tj. funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$ su linearno nezavisne na osnovu teoreme 3.

Slučaj 2. Ako je λ realan koren višestrukosti r $(\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = \lambda)$, onda su odgovarajuća fundamentalna rešenja oblika

$$\underbrace{e^{\lambda x}}_{y_1}, \quad \underbrace{xe^{\lambda x}}_{y_2}, \quad \underbrace{x^2 e^{\lambda x}}_{y_3}, \ldots, \underbrace{x^{r-1}e^{\lambda x}}_{y_r}.$$

Slično kao u slučaju 1, zbog jednostavnosti, dokaz o linearnoj nezavisnosti razmatramo samo za homogenu jednačinu drugog reda $y''+a_1y'+a_2y = 0$. Ako je λ dvostruki realan koren ove jednačine, onda su rešenja formirana na predloženi način oblika $y_1 = e^{\lambda x}$ i $y_2 = xe^{\lambda x}$. Da je $y_2 = xe^{\lambda x}$ zaista rešenje homogene jednačine dokazuje se direktnom zamenom u tu jednačinu. Za odgovarajuću Vronskijevu determinantu važi

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1+x\lambda)e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0 \;\text{ za svako }\; x \in \mathbb{R},$$

odnosno funkcije y_1 i y_2 su linearno nezavisne.

Slučaj 3. Ako je $\lambda = \alpha+i\beta$, $\beta \neq 0$, jednostruki kompleksan koren jednačine (11), tada su odgovarajuća fundamentalna rešenja oblika

$$\underbrace{e^{\alpha x}\cos\beta x}_{y_1} \quad \text{i} \quad \underbrace{e^{\alpha x}\sin\beta x}_{y_2}.$$

$y = e^{\lambda x} = e^{\alpha+i\beta} =$
$= e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} =$
$= e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$
$= \underbrace{e^{\alpha}\cos\beta}_{u(x)} + i\,\underbrace{e^{\alpha}\sin\beta}_{v(x)}$

Napominjemo da kompleksni koreni uvek javljaju u paru, kao konjugovani kompleksni brojevi, $\alpha + i\beta$ i $\alpha - i\beta$. Prvo ćemo pokazati da su formirana rešenja $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ zaista i rešenja homogene jednačine. Kao i do sada, razmatraćemo jednačinu drugog reda.

Teorema 8 *Ako je $y = u(x)+iv(x)$ rešenje homogene diferencijalne jednačine $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, onda su funkcije $y_1 = u(x)$ i $y_2 = v(x)$ takođe rešenja te jednačine.*

Dokaz. Ako uvrstimo $y = u(x)+iv(x)$ u datu homogenu jednačinu, dobićemo

$$(u+iv)''+a_1(u+iv)'+a_2(u+iv) = (u''+a_1u'+a_2u)+i(v''+a_1v'+a_2v) = 0.$$

Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dela kompleksne funkcije nuli, imaćemo

$$u'' + a_1 u' + a_2 u = 0 \quad \text{i} \quad v'' + a_1 v' + a_2 v = 0,$$

što je dokaz da su $y_1 = u(x)$ i $y_2 = v(x)$ takođe rešenja polazne homogene jednačine. □

Znamo da je $y = e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$ rešenje homogene jednačine $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Tada, na osnovu teoreme 8, to su i funkcije $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Ostaje još da pokažemo da su funkcije y_1 i y_2 linearno nezavisne. Odgovarajuća Vronskijeva determinanta u ovom slučaju je

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x}, \qquad e^{2\alpha x} \neq 0$$

gde iz pretpostavke da je $\beta \neq 0$ sledi da je $W(x) \neq 0$ za svako x iz $\mathbb{R}$, dakle funkcije y_1 i y_2 su linearno nezavisne.

Slučaj 4. Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ kompleksni koren višestrukosti r $(r > 1)$ jednačine (11), tada su ogovarajuća $2r$ fundamentalna rešenja oblika

$$e^{\alpha}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha}\cos\beta x, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha}\sin\beta x, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha}\sin\beta x.$$

Zbog složenosti dokaza, ovde nećemo razmatrati linearnu nezavisnost predloženih rešenja.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

PRIMER NAĆI OPŠTE REŠENJE D.J. $y'' - 2y' + y = 0.$

RŠ. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, $y_1(x)$, $y_2(x) = ?$

KAR. JEDN. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 \cdot \lambda^0 = 0 \iff \boxed{\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0}$

$(\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 1$ "1" JE DVOSTRUKA NULA

SLUČAJ 2° $(r = 2)$ $y_1 = e^{1 \cdot x}$, $y_2 = xe^{1 \cdot x}$, $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$

$y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$ ⟸ OPŠTE REŠ.

PRIMER. REŠITI D.J. $2y'' + y' - y = 0$.

Reš.

K.J. ⟺ $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 2}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$\lambda_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

SLUČAJ 1^0 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{\frac{1}{2}x}$.

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$ ⟸ OPŠTE REŠ.

PRIMER REŠITI D.J $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Reš

K.J. ⟺ $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$\lambda^2(\lambda - 1) + (1 - \lambda) = 0$

$\lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda - 1 = 0 \lor \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = 1 \lor \lambda^2 = 1$

$\lambda = 1 \lor \lambda = 1 \lor \lambda = -1$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = -1$

$1^0 \to y_3 = e^{-x}$

$2^0 \to y_1 = e^{x}$, $y_2 = x e^{x}$

$y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{-x}$

OPŠTE REŠ.

PRIMER Rešiti D.J. $y''' + y' = 0$.

Reš.:

K. J. $\lambda^3 + \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \iff \lambda = 0 \lor \lambda^2 + 1 = 0$

$\iff \lambda = 0 \lor \lambda^2 = -1 \iff \lambda = 0 \lor \lambda = i \lor \lambda = -i$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$ $\quad \underset{\alpha}{i = 0} + \underset{\beta}{1}\, i$

$y_1 = e^{0x} = 1$, $\;\; y_2 = e^{0x} \cdot \cos 1 \cdot x = \cos x$, $\;\; y_3 = e^{0x} \cdot \sin(x)$

$y_3 = \sin x$

$$i = \overset{\alpha}{\overset{\|}{0}} + \overset{\beta}{\overset{\|}{1}} \cdot i$$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$

$y = c_1 \cdot 1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

Beleške