Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Nehomogena linearna d.j. višeg reda sa konstantnim koeficijentima
Metod upoređevanja
Varijacija konstanti

Radna nedelja br. 11

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

– HOMOGENA D.J.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (KONSTANTE)

$y = y(x)$, $y(x)$?

$$\rightarrow \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \leftarrow$ KORENI K.J.

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \ldots \quad y_n =$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

OPŠTE REŠENJE

0.1 Nehomogene linearne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

$f(x) \not\equiv 0$

U ovom odeljku posmatraćemo diferencijalne jednačine oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{1}$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstante, a funkcija $f(x)$ različita od nule. Sledeća teorema određuje oblik opšteg rešenja ove diferencijalne jednačine.

Teorema 1 *Neka je $y_p(x)$ jedno* **partikularno** *rešenje* **nehomogene linearne jednačine n-tog reda** *(1), a*

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

opšte rešenje **odgovarajuće homogene jednačine**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0.$$

$y_h = ?$

Tada je

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)} \tag{2}$$

$y_p = ?$

opšte rešenje nehomogene jednačine (1).

Dokaz. Prvo pokažimo da je $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ rešenje nehomogene jednačine (1). Po pretpostavci, y_p je rešenje jednačine (1), tj. važi

$$y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} + a_2 y_p^{(n-2)} + \ldots + a_n y_p = f(x). \tag{3}$$

Funkcija y_h zadovoljava ogovarajuću homogenu jednačinu, odnosno

$$y_h^{(n)} + a_1 y_h^{(n-1)} + a_2 y_h^{(n-2)} + \ldots + a_n y_h = 0. \tag{4}$$

Sabiranjem jednačina (3) i (4) dobijamo

$$(y_h + y_p)^{(n)} + a_1 (y_h + y_p)^{(n-1)} + \ldots + a_n (y_h + y_p) = f(x),$$

što dokazuje da je funkcija (2) rešenje nehomogene jednačine (1). Treba još pokazati da je ono i opšte rešenje, tj. da za svaki početni uslov moguće je odrediti odgovarajuće konstante $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \ldots, C_n = C_{n0}$. Posmatrajmo sledeći početni uslov

$$y(x_0) = A_0,\ y'(x_0) = A_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1},$$

gde je x_0 proizvoljna tačka iz oblasti rešenja, a $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ su dati realni brojevi. Ako funkciju $y(x)$ pišemo u obliku (2), odnosno u obliku

y_h

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) + y_p(x),$$

onda početni uslov možemo napisati u obliku linearnog sistema jednačina

$$n\left\{\begin{array}{lllll} C_1 y_1(x_0) & + & C_2 y_2(x_0) & + \ldots + & C_n y_n(x_0) = A_0 - y_p(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) & + & C_2 y_2'(x_0) & + \ldots + & C_n y_n'(x_0) = A_1 - y_p'(x_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + \ldots + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1} - y_p^{(n-1)}(x_0). \end{array}\right. \tag{5}$$

$n \times n$

Nepoznate ovog sistema su $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Determinata D_S ovog sistema je Vronskijeva determinanta u x_0 sastavljena od funkcija $y_1, y_2, \ldots, y_n$, koja predstavljaju linearno nezavisna rešenja homogene diferencijalne jednačine. Na osnovu teoreme **??** sledi da je $D_S = W(x_0) \neq 0$, odnosno linerani sistem (5) je određen, a to znači da traženo jedinstveno rešenje postoji

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n) = (C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}). \ \Box$$

U nekim zadacima je pogodno nehomogeni deo posmatrati u obliku zbira dve funkcije (ili više funkcija), dakle u obliku $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Ovaj slučaj je razmatran u sledećoj teoremi.

Teorema 2 *Neka su y_{p1} i y_{p2} partikularna rešenja diferencijalnih jednačina*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f_1(x) \ \ i$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f_2(x),$$

respektivno. Tada je $\boxed{y_{p1} + y_{p2}}$ partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f_1(x) + f_2(x). \tag{6}$$

Dokaz. Na osnovu pretpostavke teoreme za funkcije y_{p1} i y_{p2} možemo pisati

$$y_{p1}^{(n)} + a_1 y_{p1}^{(n-1)} + a_2 y_{p1}^{(n-2)} + \ldots + a_n y_{p1} = f_1(x) \ \ \text{i}$$

$$y_{p2}^{(n)} + a_1 y_{p2}^{(n-1)} + a_2 y_{p2}^{(n-2)} + \ldots + a_n y_{p2} = f_2(x).$$

Sabiranjem ove dve jednačine, dobijamo

$$(y_{p1} + y_{p2})^{(n)} + a_1 (y_{p1} + y_{p2})^{(n-1)} + \ldots + a_n (y_{p1} + y_{p2}) = f_1(x) + f_2(x),$$

što je dokaz da je $y_{p1} + y_{p2}$ partikularno rešenje diferencijalne jednačine (6). $\Box$

$$\boxed{y = y_h + y_{p1} + y_{p2}} \leftarrow \text{OPŠTE REŠENJE}$$

$y_p(x) = ?$ KAKO DA ODREDIMO JEDNO PARTIKALNO REŠENJE?

0.1.1 Metod jednakih koeficijenata

Teorema 1 određuje opšte rešenje nehomogene jednačine sa konstantnim koeficijentima (1) u obliku $y = y_h + y_p$. Funkcija y_h je opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine (kada je $f(x) = 0$), koje možemo odrediti na način koji je opisan u odeljku **??**. Ostaje da odredimo jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine y_p. To ćemo učiniti **metodom jednakih koeficijenata**, koji se ponekad naziva i **metod upoređivanja**. Ovaj metod se primenjuje u slučaju kada je nehomogeni deo (funkcija $f(x)$) na desnoj strani jednačine (1) određenog oblika - tipska funkcija.

Posmatrajmo linearnu nehomogenu jednačinu sa konstantnim koeficijentima oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = \boxed{f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x],} \tag{7}$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i α, β realni brojevi, a $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog, odnosno m-tog stepena. Pretpostavimo da bar jedan od polinoma $P_n(x)$ ili $Q_m(x)$ različit od nula polinoma.

Partikularno rešenje nehomogene jednačine (7) tražimo u sledećem obliku

$$\boxed{y_p = x^s e^{\alpha x}[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x],}$$

gde su $R_l(x)$ i $S_l(x)$ polinomi stepena l, pri čemu je $l = \max\{n, m\}$. Prirodan broj s je višestrukost korena $\alpha + \beta i$ u karakterističnoj jednačini odgovarajuće homogene jednačine

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \tag{8}$$

Ako $\alpha + \beta i$ nije koren karateristične jednačine (8), onda uzimamo da je $s = 0$. Dokaz da y_p zaista ima oblik partikularnog rešenja čitalac može da nađe u [**?**].

Koeficijente nepoznatih polinoma $R_l(x)$ i $S_l(x)$ određujemo ubacivanjem y_p i odgovarajućih izvoda ($y_p', y_p'', \ldots, y_p^{(n)}$) u datu jednačinu (7). Izjednačavanjem nepoznatih koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x sa leve i desne strane jednačine dolazimo do linearnog sistema jednačina. Rešavanjem ovog sistema određujemo koeficijente polinoma $R_l(x)$ i $S_l(x)$, odnosno traženo partikularno rešenje y_p.

- SPECIJALNO, AKO JE $f(x) = P_n(x)$, TJ. $\alpha = 0, \beta = 0$

$$\boxed{y_p} = x^s e^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right] =$$

$$= x^s\left[R_n(x)\cos(0\cdot x) + S_n(x)\sin 0\cdot x\right] =$$

$$= \boxed{x^s \cdot R_n(x)}$$, GDE S VIŠESTRUKOST $\underset{0}{\overset{\alpha+\beta i}{\parallel}}$ KAO KORENA K.J.

PRIMER NAĆI OPŠTE REŠENJE D.J. $y'' - 5y' + 6y = x$.

Reš. (NEHOMOGENA LINEARNA DJ SA KONSTANTNIM KOEF)

$y = y_h + y_p$ ← OPŠTE REŠ.

ODREDIMO y_h

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$$

$$\boxed{y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}}$$

ODREDIMO y_p

$$f(x) = x$$

$$x = \underbrace{e^{0\cdot x}}_{1}\left[x \cdot \overbrace{\cos 0\cdot x}^{1} + \underbrace{Q_0(x)\sin 0x}_{0}\right]$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

$$P_1(x) = x, \quad Q_0(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$$

$$\alpha + \beta i = 0 + i0 = 0$$

$\Downarrow$ NIJE KOREN K.J. (JER $0 \neq 2 \wedge 0 \neq 3$)

$$\boxed{s = 0}$$

$$l = \max\{n, m\} = \max\{1, 0\} = 1$$

$$k = 1$$

$$R_l(x) = Ax + B$$

$$S_l(x) = Cx + D$$

$$y_p = x^0 e^{0\cdot x}\left[(Ax+B)\overbrace{\cos(0\cdot x)}^{1} + (Cx+D)\overbrace{\sin(0x)}^{0}\right]$$

$y_p = Ax + B$, $A, B = ?$

$y_p' = A$

$y_p'' = 0$

$y'' - 5y' + 6y = x$

$0 - 5 \cdot A + 6(Ax + B) = x$

$-5A + 6Ax + 6B = x$

$6Ax + 6B - 5A = x$

$6A = 1$
$6B - 5A = 0$

$\Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$
$6B - 5 \cdot \frac{1}{6} = 0$

$\Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$
$B = \frac{5}{36}$

$y_p = \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$

$y = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$

OPŠTE REŠ.

PRIMER NAĆI OPŠTE REŠ $y'' + y' - 2y = (x^2-1)e^{2x}$.

REŠ.

$y = y_h + y_p$

y_h

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -2$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

y_p

$f(x) = (x^2-1)e^{2x}$

$e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

$= (x^2-1)e^{2x}$

$\alpha = 2, \ \beta = 0, \ P_2(x) = x^2 - 1$
$Q_m(x) = 0 \quad (m = 0)$

$e^{2x}\left[(x^2-1)\underbrace{\cos 0 \cdot x}_{1} + 0 \cdot \underbrace{\sin 0x}_{0}\right]$

$l = \max\{n, m\} = \max\{2, 0\}$

$l = 2$

$y_p = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$

$y_p = x^s e^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$

$\alpha = 2, \ \beta = 0$

$\alpha + \beta i = 2 + 0 \cdot i = 2 \Rightarrow s = 0$ NIJE KOREN K.J.

$$y_p = x^0 e^{2x}\left[(Ax^2+Bx+C)\cos 0x + S_2(x)\underbrace{\sin 0x}_{0}\right] =$$

$$= \boxed{y_p = e^{2x}(Ax^2+Bx+C)} \leftarrow \text{OBLIK PART. REŠ.}$$

$A, B, C = ?$

$y_p', \; y_p'' \rightsquigarrow A = \frac{1}{4}, \; B = -\frac{5}{8}, \; C = \frac{13}{32}$

Beleške

9

$\vdots$

$$y = y_h + y_p = \underbrace{c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{13}{32}}_{\text{OPŠTE REŠENJE}}$$

PRIMER NAĆI OPŠTE REŠ. D.J. $y^{(IV)} + 2y'' + y = 8\cos x$.

Reš. $y = y_h + y_p$

y_h

$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

$(\lambda^2+1)^2 = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda^2 = -1 \iff \lambda = i \lor \lambda = -i$

$\lambda_1 = i, \; \lambda_2 = -i, \; \lambda_3 = i, \; \lambda_4 = -i \qquad (i = \overset{\alpha}{0} + \overset{\beta}{1}\cdot i)$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = \cos x \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \sin x \quad (4^\circ)$

$y_3 = x\cos x \qquad y_4 = x\sin x$

$$y_h = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 x\cos x + C_4 x\sin x$$

y_p $\quad f(x) = 8\cdot\cos x = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

$\alpha = 0, \; \beta = 1, \; P_0(x) = 8, \; Q_0(x) = 0$

$l = \max\{0,0\} = 0 \qquad y_p = x^s e^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$

S $\alpha + \beta i = 0 + 1 \cdot i = i$ $\longrightarrow$ JESTE KOREN K.J. VIŠESTRUKOSTI 2

$S = 2$

$$\boxed{y_p = x^2 e^{0 \cdot x}\left[A\cos x + B\sin x\right] = x^2\left(A\cos x + B\sin x\right)}$$

$A, B = ?$

$y_p',\ y_p'',\ y_p''',\ y_p^{IV}$ $\ldots$) $\boxed{y_p = -x^2\cos x}$ $(A = -1, B = 0)$

$y = y_h + y_p$

0.2 Metod varijacija konstanti

Varijacija konstanti je metod za rešavanje linearnih nehomogenih jednačina višeg reda, međutim ovde se ne zahteva da koeficijenti budu konstante. Posmatraćemo linearnu jednačinu n-tog reda oblika

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{9}$$

gde su $f(x)$ i koeficijenti $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom $D \in \mathbb{R}$. Takođe, za razliku od prethodnih razmatranja (metod jednakih koeficijenata), ovde nećemo zahtevati da funkcija $f(x)$ ima specijalan (tipski) oblik. To znači da ovaj metod može da obuhvati mnogo širu klasu diferencijalnih jednačina u odnosu na metod jednakih koeficijenata.

Pretpostavimo da su $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene jednačine

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \tag{10}$$

Glavna ideja je da opšte rešenje polazne nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$\boxed{y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),} \tag{11}$$

$C_1(x) = ?$
$C_2(x) = ?$
$\vdots$
$C_n(x) = ?$

gde su $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ sada nepoznate funkcije, koje treba da odredimo u daljem postupku. Ovde se radi o n funkcija za čije određivanje ćemo tražiti n uslova, odnosno jednačina. U nastavku ćemo opisati kako dolazimo do tih n uslova, odnosno do sistema od n jednačina za određivanje nepoznatih funkcija $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$.

Nalaženjem prvog izvoda funkcije y u (11) i malim grupisanjem članova dobijamo

$$y' = (C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n) + C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'.$$

Za prvi uslov za određivanje funkcija $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ uzećemo da je izraz u zagradi jednak nuli, tj.

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0. \tag{12}$$

Sada je $y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'$, odnosno za drugi izvod rešenja dobijamo

$$y'' = (C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n') + C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''.$$

Slično kao u slučaju prvog izvoda y', izjednačavanjem izraza u zagradi sa nulom dolazimo do drugog uslova

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \tag{13}$$

a za drugi zvod rešenja će važiti da je $y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''$. Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo da $(n-1)$-og izvoda

$$y^{(n-1)} = (C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)}) + C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)},$$

odnosno do odgovarajućeg uslova

$$C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \tag{14}$$

što konačno daje $y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}$. Odavde dobijamo n-ti izvod rešenja

$$y^{(n)} = (C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)}) + C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)}.$$

Ako sada ponovo izjednačimo izraz u zagradi sa nulom, dobićemo homogeni linearni sistem sa n jednačina i sa nepoznatama $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, čije bi rešenje bilo trivijalno, tj. $(C_1', C_2', \ldots, C_n') = (0, 0, \ldots, 0)$. To bi značilo da su funkcije $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ konstante, što ne bi dovelo do traženog rešenja nehomogene jednačine (9), jer prema teoremi **??** time bi dobili opšte rešenje homogene jednačine. Dakle, n-ti uslov ćemo odrediti na drugačiji način. Uvrštavanjem funkcija $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ u polaznu nehomogenu jednačinu (9), i uz grupisanje članova koje sadrže $C_1, C_2, \ldots, C_n$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&C_1\left(y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + a_2(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y_1\right) + \\
&C_2\left(y_2^{(n)} + a_1(x)y_2^{(n-1)} + a_2(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y_2\right) + \\
&\qquad\vdots \\
&C_n\left(y_n^{(n)} + a_1(x)y_n^{(n-1)} + a_2(x)y_n^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y_n\right) + \\
&\boxed{C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x).}
\end{aligned} \tag{15}$$

Iz pretpostavke da su funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rešenja homogene jednačine (10), sledi da su svi izrazi u zagradama jednaki nuli, odnosno jednačina (15) se svodi na sledeći oblik

$$C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x), \tag{16}$$

što predstavlja traženi n-ti uslov.

Sada možemo da napišemo dobijene uslove (12), (13), (14) i (16)

$$
\begin{array}{lcl}
C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n &=& 0 \\
C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' &=& 0 \\
\vdots & & \vdots \\
C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} &=& 0 \\
C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} &=& f(x)
\end{array}
\qquad (17)
$$

$*$

$C_1'(x)=?$

$C_2'(x)=?$

$\vdots$

$C_n'(x)=?$

NEPOZNATE

što će formirati linerani sistem od n jednačina sa n nepoznatih $C_1', C_2', \ldots, C_n'$. Nije teško videti da je determinanta ovog sistema D_S Vronskijeva determinanta W sastavljena od linerano nezavisnih rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogene jednačine. U tom slučaju je Vronskijeva determinanta različita od nule nad intervalom D, tj. $D_S = W \neq 0$, a to znači da je sistem (17) određen. Dakle, postoje jedinstveno određene funkcije

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

odnosno, dobili smo n diferencijalnih jednačina koje razdvajaju promenljive. Tražene funkcije $C_i(x)$ se mogu odrediti na sledeći način

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx + \overline{C}_i = \Phi_i(x) + \overline{C}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Uvrštavajući tako dobijene funkcije $C_i(x)$ u rešenje dato u obliku (11), konačno dobijamo traženo opšte rešenje polazne nehomogene jednačine (9)

$$\boxed{y = \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2 + \ldots + \overline{C}_n y_n + \Phi_1(x)y_1 + \Phi_2(x)y_2 + \ldots + \Phi_n(x)y_n.}$$

Imajući u vidu oblik opšteg rešenja nehomogene jednačine $y = y_h + y_p$, videti teoremu 1, zaključujemo da je

$$y_h = \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2 + \ldots + \overline{C}_n y_n, \quad \text{a}$$

$$y_p = \Phi_1(x)y_1 + \Phi_2(x)y_2 + \ldots + \Phi_n(x)y_n,$$

gde su y_h opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine, a y_p jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine.

PRIMER Naći opšte rešenje D.J. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Rej. y_h

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x e^x$$

$c_1 \to c_1(x)$

$c_2 \to c_2(x)$

$$y = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x$$

$$c_1(x), c_2(x) = ?$$

$$(*) \xrightarrow{n=2} \begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1' \cancel{e^x} + c_2' x \cancel{e^x} = 0 \\ c_1' \cancel{e^x} + c_2' \cancel{e^x}(1+x) = \frac{\cancel{e^x}}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \quad / \cdot (-1) \\ c_1' + c_2'(1+x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \\ c_2'(1+x) - c_2' x = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1' = -1 \\ c_2' = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1(x) = \int(-1)dx = -x + \overline{C_1} \\ c_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + \overline{C_2} \end{array}$$

$$y = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) = (-x + \bar{c}_1) \cdot e^x + (\ln x + \bar{c}_2)\, x e^x$$

$$y = \bar{c}_1 e^x + \bar{c}_2\, x e^x - x e^x + x \ln(x) \cdot e^x$$

OPŠTE REŠ.

Beleške

Beleške