Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Ojlerova diferencijalna jednačina
Primeri primene diferencijalnij jednačina

Radna nedelja br. 12

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

Beleške

0.1 Ojlerova diferencijalna jednačina

Jednačine koje ćemo razmatrati u ovom odeljku pripadaju klasi linearnih diferencijalnih jednačina višeg reda sa promenljivim koeficijentima koje imaju osobinu da se odgovarajućom smenom mogu svesti na jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Ojlerova diferencijalna jednačina n-tog reda je oblika

$$(ax+b)^n y^{(n)}(x) + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + A_n y(x) = f(x), \qquad (1)$$

$y(x) = ?$

gde su $a \neq 0$, b i $A_1, A_2, \ldots, A_n$ realni koeficijenti. Primetimo da je stepen linearnog člana $ax+b$ jednak redu izvoda ispred koga stoji.

$x = \frac{e^t - b}{a}$

Posmatrajmo smenu

$$\boxed{ax+b=e^t} \Leftrightarrow t = \ln(ax+b),$$

$y(x) = y\left(\frac{e^t - b}{a}\right) = y(t)$

gde je t nova promenljiva. Cilj nam je da datu jednačinu (1) napišemo u funkciji od nove promenljive t. Najpre ćemo izraziti izvode od y po t-u:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = y'_t \frac{a}{ax+b} = ae^{-t}y'_t,$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(ae^{-t}y'_t\right)\frac{a}{ax+b} = (y''_t e^{-t}a - y'_t e^{-t}a)e^{-t}a,$$

odnosno

$$y''(x) = a^2 e^{-2t}(y''_t - y'_t),$$

slično dobijamo i

$$y'''(x) = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = a^3 e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t).$$

$y^{(IV)}(x) = \frac{dy'''}{dx} = \ldots$

Postupak za određivanje ostalih izvoda y^{IV}, $y^{V}, \ldots, y^{(n)}$ se može nastaviti na sličan način. Kada u Ojlerovu diferencijalnu jednačinu (1) uvrstimo dobijene izvode $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ dobićemo linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima u odnosu na novu promenljivu t. Takva jednačina se dalje može rešiti na način opisan u odeljku **??**. Primetimo da bi bilo ispravnije uvesti novu oznaku ϕ za označavanje funkcije posle uvođenja smene

$$y(x) = y\left(\frac{e^t - b}{a}\right) = \phi(t),$$

međutim, zbog jednostavnijeg zapisa, umesto $\phi(t)$ pišemo $y(t)$ ili samo y.

$\phi(t) = y$

$\cancel{\frac{dy'}{dx}}$ $\quad y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \phi'(t)\cdot\frac{a}{ax+b}$

$y''(x) - -$ $\quad = \phi'(t)\cdot a e^{-t} = a\phi' e^{-t}$

Primer 1 *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$(n = 2)$

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = x.$$

$ax + b = x$

Diferencijalna jednačina je Ojlerovog tipa ($a = 1$, $b = 0$), zato uvodimo smenu $\boxed{x = e^t}$. Tada imamo da je

$$y' = y_t' e^{-t} \ \text{ i } \ y'' = (y_t'' - y_t')\, e^{-2t},$$

$\to (e^t)^2 \cdot (y'' - y')e^{-2t} - 4e^t \cdot y' e^{-t} + 6y = e^t$

što zamenjeno u polaznu jednačinu daje

$$y_t'' - 5y_t' + 6y = e^t, \tag{2}$$

$e^{2t} \cdot e^{-2t}(y'' - y') - 4e^t \cdot e^{-t} y' + 6y = e^t$

$e^0 \cdot (y'' - y') - 4e^0 y' + 6y = e^t$

$y'' - y' - 4y' + 6y = e^t$

$y'' - 5y' + 6y = e^t$

što predstavlja linearnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima čije je opšte rešenje u obliku $y = y_h + y_p$. Koreni odgovarajuće karakteristične jednačine $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$, pa je

$e^t = e^{1\cdot t} \cdot (P_0 \cos 0x + Q_0 \sin 0 \cdot x)$

$$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

$\alpha = 1, \ \beta = 0$

$\alpha + \beta i = 1$

$r = 0$

Partikularno rešenje tražimo u obliku $\boxed{y_p = Ae^t}$, što zamenjeno u jednačinu (2) daje

$$A\cancel{e^t} - 5A\cancel{e^t} + 6A\cancel{e^t} = \cancel{e^t},$$

odnosno $A = \frac{1}{2}$ i $y_p = \frac{1}{2}e^t$. Opšte rešenje (pomoćne) jednačine (2) je oblika

$y_p = e^{\alpha x}(R_0 \cos 0 \cdot x + S_0 \sin 0 \cdot x)$

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{2}e^t,$$

$\boxed{y_p = A e^x}$ "A

a vraćanjem smene $x = e^t$ dobijamo traženo rešenje polazne jednačine

$t = \ln x$

$$\boxed{y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2}.}$$

$e^{2t} = e^{2\cdot \ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2$

$e^{3t} = x^3$

PRIMER Naći opšte rešenje D.J.

$$(*) \qquad x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0.$$

$t = \ln x$ $\Uparrow$

Reš. $\rightarrow$ OJLEROVA D.J. SMENA: $ax + b = e^t \rightarrow \boxed{x = e^t}$ $\Downarrow$ $e^{-t} = \frac{1}{x}$

$(a = 1, b = 0)$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t \cdot \frac{1}{x} = y'_t \cdot e^{-t}$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(y'_t\, e^{-t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \left(y''_t \cdot e^{-t} + y'_t \cdot (e^{-t})'_t\right) \cdot e^{-t} =$$

$$= \left(y''_t e^{-t} + y'_t \cdot e^{-t} \cdot (-1)\right) e^{-t} =$$

$$= \left(y''_t - y'_t\right) e^{-2t}$$

$$(*) \rightarrow (e^t)^2 \cdot \left(y''_t - y'_t\right) \cdot e^{-2t} + 2 \cdot e^t \cdot y'_t \cdot e^{-t} - 6y = 0$$

$$\underbrace{e^{2t} \cdot e^{-2t}}_{e^0 = 1} \cdot \left(y''_t - y'_t\right) + 2 \cdot \underbrace{e^t \cdot e^{-t}}_{1} \cdot y'_t - 6y = 0$$

$$y''_t - y'_t + 2y'_t - 6y = 0 \iff \boxed{y''_t + y'_t - 6y = 0.}$$

JEDN. SA KONSTANTNIM KOEF.

K.J. $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$$\lambda_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} \nearrow \lambda_1 = 2 \rightarrow y_1 = e^{2t} \\ \searrow \lambda_2 = -3 \rightarrow y_2 = e^{-3t} \end{cases}$$

$$y = y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \qquad x = e^t \rightarrow t = \ln x$$

$$\underbrace{y(x)} = c_1 e^{2\cdot \ln x} + c_2 e^{-3\cdot \ln x} =$$

$$= c_1 \left(e^{\ln x}\right)^2 + c_2 \left(e^{\ln x}\right)^{-3} = \underbrace{c_1 x^2 + c_2 x^{-3}}$$

Beleške

↑ TRAŽENO OPŠTE REŠ.

PRIMER NAĆI OPŠTE REŠENJE D.J.

$$(*) \qquad (1+x)^3 \cdot y''' + (1+x) y' - y = (1+x)^2 .$$

Reš. $1 + x = ax + b \rightarrow a = 1,\ b = 1$

$$ax + b = e^t \longrightarrow \boxed{1+x = e^t}$$

$$y'(x) = y'_t \cdot e^{-t}, \quad y''(x) = e^{-2t}\left(y''_t - y'_t\right),$$

$$y'''(x) = e^{-3t}\left(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t\right)$$

$$(*) \rightarrow \underbrace{e^{3t} \cdot e^{-3t}}_{=1} \left(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t\right) + \underbrace{e^t\, e^{-t}}_{=1} y'_t - y = e^{2t}$$

$$y'''_t - 3y''_t + 3y'_t - y = e^{2t}$$

NEHOMOGENA LIN. D.J. SA KONSTANTNIM KOEF.

$$y = y_h + y_p$$

$\underline{y_h}$ $\qquad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^3 = 0$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \leftarrow \text{TROSTRUKA NULA}$$

$$y_h = C_1 e^t + C_2 \cdot t e^t + C_3 \cdot t^2 e^t$$

$e^{2t} \to y_p = Ae^{2t}$

$\cancel{y_p} =$

$y_p' = 2Ae^{2t}, \quad y_p'' = 4Ae^{2t}, \quad y_p''' = 8Ae^{2t}$

$A = 1 \quad \to \quad y = y_h + e^{2t}$

$1+x = e^t$

$t = \ln(1+x)$

$\to$ 8 $y(x) = C_1(1+x) + C_2 \ln|1+x| \cdot |1+x| + C_3 \ln^2(1+x)(1+x) + (1+x)^2$

0.2 Primeri za primenu diferencijalnih jednačina

Primer 2 (**Trenutna brzina tela u slobodnom padu**) *Telo mase m slobodno pada pod dejstvom gravitacione sile, savladajući otpor vazduha. Odrediti trenutnu brzinu tela v(t), gde t označava vreme. Znamo da je* $v(0) = 0$.

$\uparrow F_{ov} = -b\,v(t)$ ← OTPOR VAZDUHA (SREDN)

b JE KOEFICIJENT OTPORNOSTI

$b > 0$

m

g GRAV. KONST.

$\downarrow F_g = mg$ ← GRAVITACIONA SILA

POTREBNO JE ODREDITI FUNK. $v(t)$?

ZNAMO DA JE $v(0) = 0$

$t = 0 \to v = 0$

$F_R = F_g + F_{ov} = mg - b\,v(t)$

REZULTUJUĆA SILA

$F_R = m \cdot a, \quad a(t)$ ← TRENUTNO UBRZANJE

$$\boxed{ma = mg - b\,v(t)}$$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t)$

$m \cdot v'(t) = m \cdot g - b \cdot v(t), \quad v(t) = ?$ ← DIF. JEDNAČINA

$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - b\,v(t)$

$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - b\,v(t)}{m}$

$\to \int \frac{m \cdot dv}{mg - bv} = \int dt$

← JEDN. KOJA RAZDVAJA PROM.

$\int \frac{m}{mg - bv}\, dv = t \to m \cdot \int \frac{dz}{-b \cdot z} = t$

$mg - b \cdot v = z$

$-b\,dv = dz \to dv = -\frac{dz}{b}$

$$-\frac{m}{b}\int \frac{dz}{z} = t \iff -\frac{m}{b}\cdot \ln z + C = t$$

$$\iff -\frac{m}{b}\ln(mg - bv) + C = t$$

POČETNI USLOV: $t=0 \to v=0$

$$-\frac{m}{b}\ln(mg-0)+C=0 \Rightarrow C=\frac{m}{b}\ln(mg)$$

$$t = -\frac{m}{b}\ln(mg-bv)+\frac{m}{b}\ln(mg) =$$

$$= -\frac{m}{b}\left(\ln(mg-bv)-\ln(mg)\right) = -\frac{m}{b}\ln\left(\frac{mg-bv}{mg}\right)$$

$$t = -\frac{m}{b}\ln\left(\frac{mg-bv}{mg}\right) \to -\frac{b}{m}\cdot t = \ln\left(\frac{mg-bv}{mg}\right)$$

$$\to e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{mg-bv}{mg} \to e^{-\frac{b}{m}t} = 1-\frac{bv}{mg}$$

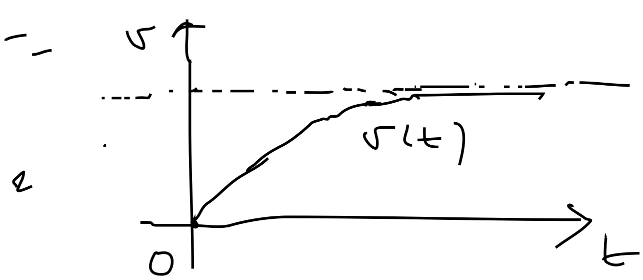
$$\to \frac{bv}{m} = g - g\cdot e^{-\frac{b}{m}t} \to v = \frac{mg}{b}-\frac{mg}{b}e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{b}-\frac{mg}{b}e^{-\frac{b}{m}t}}$$

ZAPAŽANJA

1) $v(0) = \frac{mg}{b} - \frac{mg}{b}\cdot \overset{=1}{e^{0}} = 0$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{mg}{b} - \frac{mg}{b}\overset{\to 0}{\cancel{e^{-\frac{b}{m}t}}} = \frac{mg}{b} = v_T$ ← FINALNA BRZINA

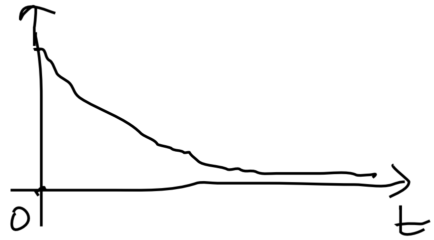


$v_T = \text{const} = \frac{mg}{b}$

3) $v(t) = v_T = const \to a(t) = 0 \to ma = mg - bv$

$$0 = mg - bv$$

$$\boxed{mg = bv}$$



Beleške

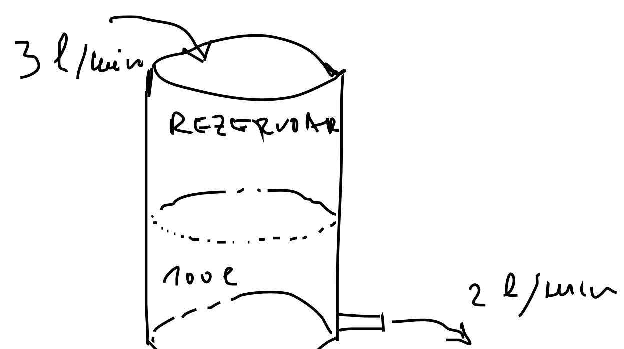
4) $a(t) = \frac{dv}{dt} = g e^{-\frac{b}{m}t}$

$$a(0) = g e^{-\frac{b}{m}\cdot 0} = g$$

$a(t) \to 0$, када $t \to +\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = \lim_{t\to+\infty} g e^{-\frac{b}{m}t} = 0$$

Primer 3 *U donjem delu velikog rezervoara ima 100l vodenog rastvroa od 10kg soli. Voda utiče u rezervoar brzinom od 3l u minuti, a rastvor iz njega ističe brzinom od 2l u minuti, pri čemu se mešanjem održava jednaka koncentracija. Koliko soli će biti u rezervoaru po isteku jednog sata?*



$x(t)$ – KOLIČINA SOLI U REZERVOARU U kg PO ISTEKU VREMENA t (min)

$x(t) = ?$

$x(0) = 10\,\text{kg}$ (POČETNI USLOV)

- ZA 1 MINUT RASTVOR SE POVEĆA ~~ZA~~ 1 l.
- U VREMENSKOM INTERVALU (MALOM) $dt \simeq \Delta t > 0$ GUBIMO $2\,dt$ l RASTVORA.
- KOLIČINA RASTVORA U TRENUTKU t JE $(100+t)$ l.
- KONCENTRACIJA U TRENUTKU t JE $c(t) = \dfrac{x(t)}{100+t}\ \dfrac{\text{kg}}{\text{l}}$.
- U TOKU VREMENSKOG INTERVALA $dt = (t+\Delta t) - t = \Delta t > 0$ IZ REZERVOARA ISTEČE $2\,dt$ l RASTVORA, ODNOSNO $2c(t)dt$ kg SOLI. PROMENA $dx = x(t+\Delta t) - x(t)$,

$$dx = -2\,c(t)\,dt \iff \boxed{dx = -2\cdot\frac{x(t)}{100+t}\,dt}$$

← DJ. KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE

⋮

$x(t) =$

$x(60) =$

Beleške

Beleške