Univerzitet u Novom Sadu

Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)

STUDIJSKI PROGRAM: MAŠINSTVO

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Integracija racionalnih funkcija, integracija nekih iracionalnih funkcija.

Radna nedelja br. 2

Prof. dr Tibor Lukić

PRAVA RAC. FUNK.

• RASTAVLJANJE NA ZBIR PARCIJALNIH RAZLOMAKA

$$\int \frac{P_m(x)}{(x-a)^l (x^2+px+q)^k} = \int \frac{A_1}{x-a} + \int \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \int \frac{A_l}{(x-a)^l} + \int \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \int \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \int \frac{B_k x + C_k}{(x^2+px+q)^k},$$

$l, k \in \mathbb{N}$

2

gde je $p^2 - 4q < 0$

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

$$\int dF = \int f'(x)dx = f(x) + c$$

$f(x) \quad x \in [a, b]$

$$\int f(x)\,dx \overset{def.}{=} F(x) + c \qquad \int f(x)\,dx = ?$$

$$F'(x) = f(x)$$

1) $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + c$

SMENA: $2x = t \Rightarrow 2dx = dt$

$$dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \cos 2x\,dx = \int \cos t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sin t + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int f(x)\,dx = \dots ?$$

- RACIONALNA FUNKCIJA

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

PRIMER

a) $R(x) = \frac{x^2+3x-1}{5x^7-3x^2+2}$

$P_2(x) = x^2+3x-1$

$Q_7(x) = 5x^7-3x^2+2$

0.1 Integracija racionalnih funkcija

Racionalna funkcija je količnik dva polinoma

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog i m-tog stepena, respektivno. Ako je $n < m$, onda je $R(x)$ **prava racionalna funkcija**. U suprotnom, kada je $n \geq m$, $R(x)$ je **neprava racionalna funkcija**. Međutim, na osnovu teoreme o deljenju dva ne-nula polinoma, imamo da svaku nepravu racionalnu funkciju, posle deljenja polinoma $P_n(x)$ polinomom $Q_m(x)$, možemo svesti na zbir polinoma količnika $S_{n-m}(x)$ i prave racionalne funkcije $\frac{T_l(x)}{Q_m(x)}$, odnosno

$$R(x) = S_{n-m}(x) + \frac{T_l(x)}{Q_m(x)},$$

gde je $l < m$. Otuda integral neprave racionalne funkcije $R(x)$ dobija oblik

$$\int R(x)\,dx = \int S_{n-m}(x)\,dx + \int \frac{T_l(x)}{Q_m(x)}\,dx.$$

gde je $p < n$. S obzirom da se integracija polinoma $S_{n-m}(x)$ izvodi direktno (koristeći osobine 3 i 4 neodređenog integrala), ostaje nam još samo da pokažemo kako se vrši integracija prave racionalne funkcije. S tim u vezi, znamo da svaka prava racionalna funkcija može predstaviti u obliku zbira **parcijalnih ili prostih razlomaka**, tj. racionalnih funkcija oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

gde su $A, B, C, a, p, q \in \mathbb{R},\ k, m \in \mathbb{N}$ i $p^2 - 4q < 0$. Iz ovog sledi da problem integracije prave racionalne funkcije se može svesti na integraciju odgovarajućih parcijalnih razlomaka. U nastavku ćemo pokazati da je integracija svih tipova parcijalnih razlomaka moguća, odnosno da je moguće odrediti intergal svake racionalne funkcije.

1^0 Intgeral oblika

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx,$$

SMENA: $x - a = t$

rešavamo smenom $x - a = t$. Tada je $dx = dt$, a za integral dobijamo

$$I = A \int \frac{dt}{t} = A \ln|t| + C = A \ln|x - a| + C, \quad \text{za} \quad x \neq a.$$

2^0 Integral oblika

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\, dx, \quad \text{gde je} \quad k \geq 2,$$

se rešava smenom $x - a = t$, odnosno $dx = dt$. Tada imamo

$$I = A \int \frac{dt}{t^k} = A \int t^{-k}\, dt = A \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C$$

$$= -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, \quad \text{gde je} \quad x \neq a.$$

3^0 Ovaj tip integrala ima sledeći opšti oblik

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}\, dx, \quad p^2 - 4q < 0, \; m \in \mathbb{N},$$

gde uslov $p^2 - 4q < 0$ implicira da se u imeniocu podintegralne funkcije nalazi kvadratni trinom $x^2 + px + q$ koji nema realnih nula, odnosno ne može da se rastavi na proizvod linearnih faktora. Ovaj kvadratni trinom uvek možemo napisati u kanoničkom obliku

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

$p^2 - 4q < 0 \quad /:4$

$\Downarrow$

$\frac{p^2}{4} - q < 0 \quad /\cdot(-1)$

$\Downarrow$

$q - \frac{p^2}{4} > 0$

gde je $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$. Koristeći ovu činjenicu, opšti oblik integrala možemo napisati u obliku

$$\int \frac{Bx + C}{\left((x + \frac{p}{2})^2 + \underbrace{(q - \frac{p^2}{4})}_{D}\right)^m}\, dx$$

odakle uvođenjem nove promenljive $t = x + \frac{p}{2}$ imamo:

$$\int \frac{Bt - \frac{Bp}{2} + C}{\left(t^2 + D\right)^m}\, dt = B \int \frac{t\, dt}{\left(t^2 + D\right)^m} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2 + D\right)^m}}_{I_m}. \quad (1)$$

Prvi integral se rešava smenom $z = t^2 + D$, dok kod drugog integrala I_m mogu nastupiti dva slučaja:

a) za $m = 1$, integral I_m se svodi na tablični integral $I_1 = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{D}}$ jer je $D > 0$ (zbog uslova $p^2 - 4q < 0$);

b) za $m \geq 2$ primenjujemo parcijalnu integraciju

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(t^2+D)^m} && \Rightarrow du = \frac{-m(t^2+D)^{m-1} \cdot 2t}{(t^2+D)^{2m}} = -2m\frac{t}{(t^2+D)^{m+1}} \\ dv &= dt && \Rightarrow v = t, \end{aligned}$$

odakle imamo

$$\begin{aligned} I_m = \int \frac{dt}{\left(t^2+D\right)^m} &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2m \int \frac{t^2}{\left(t^2+D\right)^{m+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2m \int \frac{t^2+D-D}{\left(t^2+D\right)^{m+1}}\, dt \\ &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2m \int \frac{t^2+D}{\left(t^2+D\right)^{m+1}}\, dt - 2mD \int \frac{dt}{\left(t^2+D\right)^{m+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2m \int \frac{dt}{\left(t^2+D\right)^{m}} - 2mD \int \frac{dt}{\left(t^2+D\right)^{m+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2+D)^m} + 2mI_m - 2mDI_{m+1}. \end{aligned}$$

Rešavanjem poslednje rekurentne veze po I_{m+1} dobijamo

$$I_{m+1} = \frac{t}{2mD(t^2+D)^m} + \frac{2m-1}{2mD} I_m,$$

odnosno nakon smanjivanja indeksa m za 1 sledeću rekurentnu formulu:

$$I_m = \frac{t}{2(m-1)D(t^2+D)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)D} I_{m-1}.$$

0.2 Integracija iracionalne funckcije

U ovom delu ćemo posmatrati integraciju funkcija kod kojih se nepoznata promenljiva nalazi pod znakom nekog korena, odnosno argument je iracionalne funkcije. Određene tipove integrala iracionalnih funkcija možemo rešiti

$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$, $\int \sqrt{2x+x^2}\, dx$ ...

svođenjem odgovarajućom smenom na integrale racionalnih funkcija ili direktno na tablične integrale. U nastavku ćemo obraditi upravo nekoliko takvih oblika integrala iracionalnih funkcija.

1) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

1^0 Integral oblika

$$\int \mathcal{R}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_m}\right) dx,$$

$r_1 = \frac{1}{2} = \frac{p_1}{q_1}$

gde su $\mathcal{R}$ racionalna funkcija više promenljivih,

2) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2}$

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1}, \ldots, r_m = \frac{p_m}{q_m} \in \mathbb{Q}$$

i $ad-bc \neq 0$. Ako je p *najmanji zajednički sadržalac* brojeva $q_1, q_2, \ldots, q_m$, tada se integral smenom

$p = NZS\{q_1, q_2, .., q_m\}$

$$t^p = \frac{ax+b}{cx+d},$$

odnosno

$$x = \frac{dt^p - b}{a - ct^p} = f(t), \quad dx = f'(t)dt.$$

svodi na integral racionalne funkcije

$$\int \mathcal{R}\left(f(t), t^{pr_1}, \ldots, t^{pr_m}\right) f'(t)dt = \int \mathcal{R}_1(t)dt,$$

gde su sada vrednosti pr_i, $i = 1, 2, .., m$ celi brojevi, a to znači da je dobijena podintegralna funkcija, označena sa $\mathcal{R}_1(t)$, racionalna po promenljivoj t.

2^0 Integral oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx \tag{2}$$

gde je P_n polinom n-tog stepena po x ima poznat oblik primitivne funkcije u kojoj se nalaze neodređeni koeficijenti koje treba izračunati. Naime, odgovarajuća primitivna funkcija je oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3}$$

gde je λ neodređeni koeficijent, a $Q_{n-1}(x)$ polinom sa neodređenim koeficijentima stepena $(n-1)$. Diferenciranjem, iz prethodnog identiteta, dobijamo

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

odnosno množenjem jednakosti sa $2\sqrt{ax^2+bx+c}$, imamo

$$2P_n(x) = 2Q'_{n-1}(x)\cdot(ax^2+bx+c) + (2ax+b) + 2\lambda.$$

Dalje, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene polinoma na levoj i desnoj strani određujemo vrednost za λ i nedređene koeficijente polinoma $Q_{n-1}(x)$. Odavde, zamenom dobijenih koeficijenata u identitet (3) i svođenjem integrala $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ pogodnim smenama na odgovarajući tablični integral, početni integral (2) je u potpunosti određen.

3^0 Integral oblika

$$\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

transformacijom $P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c} = \dfrac{P_n(x)(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se svodi na integral oblika

$$\int \frac{Q_{n+2}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

koji se rešava na način opisan za integral oblika 2^0.

4^0 Integral oblika

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad n\in\mathbb{N},$$

se smenom $x-\alpha = \dfrac{1}{t}$, odnosno $x = \dfrac{1}{t}+\alpha$ i $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, svodi se na integral

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t^n} \cdot \sqrt{\dfrac{dt^2+et+a}{t^2}}}$$

$$= -\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{dt^2+et+a}},$$

što je ponovo poznati integral oblika 2^0, gde su korišćene oznake $d = a\alpha^2 + b\alpha + c$ i $e = 2a\alpha + b$.

0.3 Primeri

0.3.1 Integral racionalne funkcije

1. Rešiti sledeće integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-4)}\, dx$

Rešenje: Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija i možemo je integraliti metodom neodređenih koeficijenata. Najpre polinom u imeniocu ove funkcije rastavljamo na proste činioce, $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Stoga, traženi integral možemo zapisati kao $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\, dx$. Racionalnu funkciju dalje rastavljamo na zbir parcijalnih razlomaka

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2},$$

gde su A i B koeficijenti koje određujemo. Množeći poslednju jednakost sa $(x-2)(x+2)$ dobijamo

$$\begin{aligned} 1 &= A(x+2) + B(x-2) \\ 1 &= x(A+B) + 2A - 2B \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata koji stoje uz x i x^0 na levoj i desnoj strani dobijamo sistem

$$\begin{array}{lcll} A + B = 0 & \Rightarrow & B = -A, & B = -\frac{1}{4} \\ 2A - 2B = 1 & \Rightarrow & 2A + 2A = 1, & A = \frac{1}{4} \end{array}$$

Prema tome, dobili smo $\dfrac{1}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{4(x-2)} - \dfrac{1}{4(x+2)}$.

Sada možemo rešiti dati integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\, dx &= \int \left(\frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)} \right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2} \\
&= \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^3+1}{x^2(x^2+1)}\, dx$ $\qquad \dfrac{P_5(x)}{Q_4(x)} = R(x) \to$ NEPRAVA RAC. $\Rightarrow P_5(x) \cdot Q_4(x)$

$7 : 3 = 2$
$1 \qquad 7 = 3 \cdot 2 + 1$

Rešenje: U pitanju je integracija neprave racionalne funkcije (stepen polinoma u brojiocu je veći od stepena polinoma u imeniocu) te je prvo potrebno podeliti polinom $x^5 + x^3 + 1$ polinomom $x^2(x^2+1) = x^4 + x^2$. Deljenjem dobijamo količnik x i ostatak 1, te početni integral možemo zapisati kao

$x^5 + x^3 + 1 : (x^4 + x^2) = x$
$-x^5 - x^3$
$0 \quad 0 \quad 1$

OSTATAK = 1
KOLIČNIK = x

$$\int \left(x + \frac{1}{x^2(x^2+1)} \right) dx = \int x\, dx + \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$$

Sada se zadatak svodi na rešavanje integrala prave racionalne funckije $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$. Imenilac ove funckije je faktorisan na proste činioce ($x^2 + 1$ je nesvodljiv u skupu $\mathbb{R}$), pa funkciju predstavljamo kao zbir parcijalnih razlomaka na sledeći način:

$x^5 + x^3 + 1 =$
$= x(x^4 + x^2) + 1$
$\Downarrow$
$\dfrac{x^5+x^3+1}{x^4+x^2} = x + \dfrac{1}{x^4+x^2}$
$\uparrow$
PRAVA RAC. FUNK.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \qquad / \cdot x^2(x^2+1) \\
1 &= Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \\
1 &= x^3(A+C) + x^2(B+D) + xA + B
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz stepene promenljive x dobijamo

$$\boxed{\text{B=1}},\quad \boxed{\text{A=0}},\quad A + C = 0 \Rightarrow \boxed{\text{C=0}},\quad B + D = 0 \Rightarrow \boxed{\text{D=-1}}.$$

$B = 1$
$A = 0$
$B + D = 0$
$A + C = 0$

$\Longleftrightarrow$

$B = 1$
$A = 1$
$C = 0$
$D = -1$

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$$

Vraćanjem u početni integral dobijamo

$$\int \frac{x^5+x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$$

NAPOMENA: Postupak rastavljanja racionalne funkcije $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$ na zbir parcijalnih razlomaka smo mogli skratiti uočavajući da je

$$\frac{1 \pm x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x^2(x^2+1)} - \frac{x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

0.3.2 Integracija nekih tipova iracionalnih funkcija

1. Rešiti sledeće integrale:

$\dfrac{ax+b}{cx+d} = x+1$, $p = NZS\{2,1\} = 2$

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)-\sqrt{x+1}}\,dx$

$t^p = x+1$

Rešenje: Traženi integral možemo zapisati kao $\displaystyle\int \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}+2}{(x+1)^1-(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx.$ Pojavljuju se $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ i $(x+1)^1$ (imenioci eksponenata su 2 i 1), pa je $p = NZS\{2,1\} = 2$. Stoga, za rešavanje ovog integrala koristimo smenu $x+1=t^2$, odakle imamo

$d\,/$

$$x = t^2 - 1$$
$$dx = 2t\,dt$$

Dalje, početni integral zapisujemo i rešavamo na sledeći način

$$\int \frac{(t^2)^{\frac{1}{2}}+2}{(t^2)^1-(t^2)^{\frac{1}{2}}}\,\overbrace{2t\;dt}^{dx}=2\cdot\int\frac{t+2}{t^2-t}\;t\;dt$$

INTEGRAL RACIONALNE FUNKCIJE!

$$=2\cdot\int\frac{t+2}{\cancel{t}(t-1)}\;\cancel{t}\;dt=2\cdot\int\frac{t-1+3}{t-1}\;dt$$

$$=2\cdot\int dt+6\cdot\int\frac{dt}{t-1}=2\cdot t+6\cdot \ln|t-1|+C$$

$$=2\cdot\sqrt{x+1}+6\cdot\ln|\sqrt{x+1}-1|+C.$$

(b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Rešenje: Dati integral možemo zapisati kao $\displaystyle\int\frac{dx}{(x)^{\frac{1}{2}}+(x)^{\frac{1}{3}}}$, odakle nalazimo da je $p=NZS\{2,3\}=6$. Smena koju uvodimo je $\boxed{x=t^6}$, pa imamo da je $dx=6\cdot t^5\;dt$. Dalje rešavamo na sledeći način $\Longrightarrow t=\sqrt[6]{x}$

INT. RAC. FUNK.

$$\int\frac{6\cdot t^5\;dt}{(t^6)^{\frac{1}{2}}+(t^6)^{\frac{1}{3}}}=6\cdot\int\frac{t^5\;dt}{t^3+t^2}=6\cdot\int\frac{t^{\cancel{5}}\;dt}{\cancel{t^2}(t+1)}$$

II NAČIN

$t^3:(t+1)=$

$R=$

$$=6\cdot\int\frac{t^3\pm1}{t+1}\;dt=6\cdot\int\frac{t^3+1}{t+1}\;dt-6\cdot\int\frac{dt}{t+1}$$

$$=6\cdot\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}\;dt-6\cdot\int\frac{dt}{t+1}$$

$$=6\cdot\frac{t^3}{3}-6\cdot\frac{t^2}{2}+6t-6\cdot\ln|t+1|$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\cdot\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

3. Rešiti integrale:

(a) $\displaystyle\int\frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+1}}\;dx$ $\displaystyle=\int\frac{P_2(x)}{\sqrt{x^2+1}}\;dx$

$n=2$

$ax^2+bx+c=x^2+1$

2°

$$\int \frac{P_2(x)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = Q_1(x)\cdot\sqrt{x^2+1} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\int \frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = (ax+b)\sqrt{x^2+1} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad /'$$

$a, b, \lambda = ?$

Rešenje: U brojiocu podintegralne funkcije imamo polinom po x drugog stepena, stoga je u našem slučaju polinom $Q(x)$ prvog stepena, odnosno $ax+b$.

$$\int \frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = (ax+b)\sqrt{x^2+1} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x$$

Da bismo odredili koeficijente a, b i λ izjednačavamo izvode leve i desne strane ove jednakosti.

$$\frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+1}} = a\cdot\sqrt{x^2+1} + (ax+b)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} + \lambda\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \quad /\cdot\sqrt{x^2+1}$$

Pomnožićemo jednakost sa $\sqrt{x^2+1}$, čime dobijamo

$$4x^2+5x+1 = a\cdot(x^2+1) + (ax+b)\cdot x + \lambda$$

$$4x^2+5x+1 = x^2(a+a) + xb + a + \lambda$$

$2a = 4$
$b = 5$
$a + \lambda = 1$ $\Longleftrightarrow$

Izjednačavanjem koeficijenta uz odgovarajuće stepene promenljive x dobijamo

$$\Longleftrightarrow \quad 2a = 4 \to \boxed{a = 2;} \quad \boxed{b = 5;} \quad a+\lambda = 1 \to \boxed{\lambda = -1}$$

Odredili smo nepoznate koeficijente, pa početni integral možemo zapisati

$$\int \frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = (2x+5)\sqrt{x^2+1} - \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= (2x+5)\sqrt{x^2+1} - \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C$$

TABLIČNI INTEGRAL!

(b) $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$

Rešenje: Primetimo prvo da dati integral možemo zapisati kao

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

Na ovaj integral primenimo gore objašnjeni postupak.

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = (ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad /\frac{d}{dx}$$

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = a\sqrt{x^2+x+1} + (ax+b)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Množimo obe strane jednakosti sa $2\sqrt{x^2+x+1}$ i dobijamo

$$2(x^2+x+1) = 2a(x^2+x+1) + (ax+b)(2x+1) + 2\lambda$$

$$2x^2+2x+2 = x^2(2a+2a) + x(2a+a+2b) + 2a+b+2\lambda$$

$$4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}; \qquad 3a+2b = 2 \rightarrow b = \frac{1}{4}; \qquad 2a+b+2\lambda = 2 \rightarrow \lambda = \frac{3}{8}$$

Sada je

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = (*)$$

Uvođenjem smene $x+\frac{1}{2} = t$, $dx = dt$, poslednji integral se svodi na $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}$, koji je tablični i iznosi $\ln|\mathrm{t} + \sqrt{\mathrm{t}^2+\frac{3}{4}}|$. Dobijamo da je

$$(*) = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - \frac{1}{2}(a) = \frac{1}{2}\ln|z| - \frac{1}{2}(a) = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2}(a) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}(a) = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

Beleške

1 PRIMER. REŠITI INTEGRAL

a) $$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$p^2-4q = 1^2-4\cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow 3^\circ$

$x+\frac{1}{2} = t$

$dx = dt$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c}$$

$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+x+\frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

b) $$I = \int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x\,dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + 2\underbrace{\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}_{(a)} =$$

3° $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$$\int \frac{x\,dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}}_{(a)} \overset{(*)}{=}$$

$x+\frac{1}{2} = t \rightarrow x = t-\frac{1}{2}$

$dx = dt$

$z = t^2+\frac{3}{4} \rightarrow dz = 2t\,dt$

$t\,dt = \frac{1}{2}dz$