



Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka



PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Integracija trigonometrijskih funkcija

Radna nedelja br. 3

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

$$\bullet \int R(x) dx = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$$

$$\bullet \int \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}}{2 + \sqrt{t^6}} \cdot 6 t^5 dt =$$

$$\text{SMEVA: } x+1 = t^6, \quad G = \text{NBS}\{2,3\}$$

$$dx = 6 t^5 dt$$

$$\stackrel{\text{FA}}{=} \int \frac{t^3 + t^2}{2 + t^3} \cdot 6 t^5 dt = 6 \int \frac{(t^3 + t^2) \cdot t^5}{2 + t^3} dt \dots$$

K NISE PRAVA
RAC. FUNK.

$$\bullet \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\bullet \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = A \cdot \sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}, \quad A, \lambda = ?$$

$$\frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}} = A \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \cdot (2x+1) + \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$2(x+1) = A(2x+1) + 2\lambda$$

$$2x+2 = 2Ax + A + 2\lambda \Rightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ A + 2\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

0.1 Integracija trigonometrijskih funkcija

Ovaj odeljak razmatra rešavanje nekoliko tipova integrala kod kojih podintegralna funkcija sadrži trigonometrijske funkcije.

1^o Integral oblika

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx,$$

Primer. a) $\int \frac{\sin^2 x + 3 \cos^3 x}{\sin x \cdot \cos x} dx$

b) $\int (\sin^2 x + \cos^3 x) dx$

gde je podintegralna funkcija racionalna funkcija od $\sin x$ i $\cos x$, može se rešiti primenom **opšte trigonometrijske smene**

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Za ovu smenu važi da je

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

a funkcije $\sin x$ i $\cos x$ možemo izraziti preko nove promenljive t na sledeći način

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{i} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Koristeći predloženu smenu i gore izvedene formule, integral tipa 1^o se svodi na integral racionalne funkcije

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int \mathcal{R}_1(t) dt.$$

2^o Integrali oblika

$$\int \mathcal{R}(\sin x) \cos x dx \quad \text{i} \quad \int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx$$

smenama

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx, \quad \text{odnosno} \quad t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx, \quad \text{respektivno,}$$

mogü svesti na integrale racionalnih funkcija po novoj promenljivoj t .

PRINT. REŠEN INTEGRAL $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$. (1^o), (2^o)

REŠ. $R(\cos x) = \frac{1}{(1-\cos x)^2} \rightarrow \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx = \int R(\cos x) \cdot \sin x dx$

ŠTENA: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow -dt = \sin x dx$ (2^o)

$$4 \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx = \int \frac{-dt}{(1-t)^2} = -\int \frac{dt}{(1-t)^2} = -\int \frac{-dt}{z^2} = \int z^{-2} dz =$$

3^o Integral oblika

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx$$

se smenom

$$t = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

može svesti na integral racionalne funkcije po promenljivoj t . Diferenciranjem jednačine veze dobijamo

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Međutim, često se koristi i veza bazirana na inverznoj funkciji

$$x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

4^o Integrali oblika

$$\int P_n(x) \cos \beta x dx \quad \text{i} \quad \int P_n(x) \sin \beta x dx,$$

gde su $P_n(x)$ polinom n -tog stepena i $\beta \in \mathbb{R}$, rešavaju se uzastopnom primenom parcijalne integracije, koja se nastavlja n puta. U svakom koraku za funkciju u se bira polinom, jer se na taj način stepen polinoma u novom integralu smanjuje za jedan. Šematski prikaz i -te parcijalne integracije možemo zapisati na sledeći način

$$u = P_{n-i}(x) \quad \Rightarrow \quad du = P_{(n-i)-1}(x) dx$$

$$dv = \cos \beta x dx \quad (\sin \beta x dx) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \quad \left(-\frac{1}{\beta} \cos \beta x \right),$$

a i će uzimati vrednosti od nule do $n-1$. U poslednjem koraku, kada je $i = n-1$, polinom će biti nultog stepena, odnosno konstanta, što znači da prilikom poslednje parcijalne integracije dolazimo do integrala tipa

$$\int \sin \beta x dx \quad \text{ili} \quad \int \cos \beta x dx,$$

koji se lako mogu rešiti.

$$1-t = z$$

$$-dt = dz$$

$$dt = -dz$$

$$= \frac{z^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{z} + C =$$

$$= -\frac{1}{1-t} + C$$

$$= \frac{1}{t-1} + C =$$

$$= \frac{1}{\cos x - 1} + C$$

PRIMER. REŠITI INTEGRAL $I = \int \frac{1 + \tan x}{\sin 2x} dx$, $x = \frac{2\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x \cdot \cos x = 2 \cdot \tan x \cdot \cos^2 x$$

$$I = \int \frac{1 + \tan x}{2 \tan x \cos^2 x} \cdot dx = \int \frac{1 + \tan x}{2 \tan x} \cdot \left(\frac{dx}{\cos^2 x} \right) \stackrel{= dt}{=} \int \frac{1 + t}{2t} \cdot dt = \frac{1}{2} \int \frac{1+t}{t} dt$$

$$\boxed{\tan x = t} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt = \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{t} dt + \int dt \right) = \frac{1}{2} (\ln |t| + t) + C$$

0.2 Integracija izraza sa eksponencijalnom funkcijom

$$= \frac{1}{2} (\ln |\tan x| + \tan x) + C$$

Važna osobina eksponencijalne funkcije e^x jeste da njen oblik ostaje nepromenjen pod dejstvom operatora izvoda ili neodređenog integrala. Ove činjenice se koriste u rešavanju integrala sa eksponencijalnom funkcijom.

1^o Integral oblika

$$\int R(e^x) dx,$$

smenom

$$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{t},$$

$$\int R(e^x) dx = \int R(t) \cdot \frac{dt}{t} =$$

se svodi na integral racionalne funkcije.

$$= \int \frac{R(t)}{t} dt = \int R_n(t) dt$$

2^o Integral oblika

$$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

gde je $P_n(x)$ polinom n -tog stepena, rešava se uzastopnom primenom parcijalne integracije, koja se nastavlja n puta. U svakom koraku za funkciju u se bira polinom, jer se na taj način stepen polinoma u novom integralu smanjuje za jedan. Šematski prikaz i -te parcijalne integracije možemo zapisati na sledeći način

$$u = P_{n-i}(x) \Rightarrow du = P_{(n-i)-1}(x) dx$$

$$dv = e^{\alpha x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x},$$

gde će i uzimati vrednosti od nule do $n - 1$. U poslednjem koraku, kada je $i = n - 1$, polinom će biti nultog stepena, odnosno konstanta, što znači da prilikom poslednje parcijalne integracije dolazimo do integrala tipa

$$\int e^{\alpha x} dx$$

$$\alpha x = t$$

koji se lako rešava.

3⁰ Integrali oblika

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx \text{ i } \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

rešavaju se primenom parcijalne integracije, uzastopno dva puta. Poka-
zaćemo to na primeru prvog integrala, drugi se rešava analogno. Ako u
formuli za prvu parcijalnu integraciju za u biramo tako da bude $u = e^{\alpha x}$,
dobijamo

$$I = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

$du = \alpha e^{\alpha x} dx$
 $dv = \sin \beta x dx \rightarrow v = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x$

U drugoj parcijalnoj integraciji, ako za u ponovo biramo tako da bude
 $u = e^{\alpha x}$, dobićemo

$$I = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx \right],$$

$du = \alpha e^{\alpha x} dx$
 $dv = \cos \beta x dx \rightarrow v = \frac{1}{\beta} \sin \beta x$
JEDNAČINA PO I!

gde je integral u uglastoj zagradi identičan sa polaznim integralom. To
nam omogućava da traženi integral I odredimo kao rešenje jednačine

$$I = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} I \right],$$

što nam na kraju daje traženu primitivnu funkciju

$$I = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta x - \cos \beta x \right).$$

0.3 Primeri

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta x - \cos \beta x \right) + C$$

0.3.1 Integracija trigonometrijskih funkcija

1. Rešiti sledeće integrale:

(a) $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$

Rešenje: Posmatrani integral je oblika $\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)$ pa za njegovo

POJMPAK

"SUODKAZJE NA ISTI
OBLIK"

rešavanje koristimo sledeću smenu:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t &\Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \\ &\Rightarrow x = 2 \cdot \operatorname{arctg} t \\ &\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \end{aligned}$$

što zajedno sa $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ daje:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \cdot \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 3} \\ &= 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{3}$$

2. Rešiti sledeće integrale:

(a) $\int (1 + \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg} x \, dx$

Rešenje: Koristeći relaciju $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ posmatrani integral postaje:

$$\begin{aligned} \int (1 + \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg} x \, dx &= \int (1 + \sin^2 x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{1 + \sin^2 x}{\sin x} \cos x \, dx. \end{aligned}$$

$\int R(\sin x) \cdot \cos x \, dx$
 $\sin x = t$
 $\cos x \, dx = dt$

S obzirom da je poslednji integral oblika $\int R(\sin x) \cdot \cos x \, dx$, za njegovo rešavanje koristimo smenu $t = \sin x$, odnosno $dt = \cos x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1+t^2}{t} dt &= \int \frac{dt}{t} + \int t \, dt \quad \hookrightarrow \frac{1+t^2}{t} = \frac{1}{t} + \frac{t^2}{t} = \frac{1}{t} + t \\ &= \ln |t| + \frac{t^2}{2} + C = \ln |\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

(b) $\int \sin x \cos x dx$

20

Rešenje: Ovaj integral se može posmatrati i kao $\int \mathcal{R}(\sin x) \cdot \cos x dx$ ali i oblika $\int \mathcal{R}(\cos x) \cdot \sin x dx$. Ovde ćemo do rešenja doći posmatrajući ga kao $\int \mathcal{R}(\sin x) \cdot \cos x dx$, odnosno smenom $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$\int \sin x \cos x dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

dok slučaj da se dati integral posmatra u obliku $\int \mathcal{R}(\cos x) \cdot \sin x dx$ ostavljamo čitaocu za vežbu.

(c) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$

30

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$$

Rešenje:

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + 2} dx = \int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 2} dx. \quad (1)$$

Kako je poslednji integral oblika $\int \mathcal{R}(\operatorname{tg} x) dx$, za njegovo rešavanje koristimo smenu $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t$, odnosno $dx = \frac{dt}{1+t^2}$:

$$\int \frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} dt.$$

PRAVA RAC.
FUNK.

S obzirom da je ovo integral prave racionalne funkcije koju prethodno predstavljamo u obliku zbira parcijalnih razlomaka na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} &= \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{-\frac{3}{5}}{t+2} + \frac{\frac{3}{5}t - \frac{1}{5}}{1+t^2} \\ &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{t+2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+t^2}, \end{aligned}$$

tada poslednji integral zapisujemo kao:

$$\int \frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} dt = -\frac{3}{5} \cdot \int \frac{dt}{t+2} + \frac{3}{5} \cdot \int \frac{t dt}{1+t^2} - \frac{1}{5} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{smene: } u = t+2, \quad v = t^2+1 \\ du = dt, \quad dv = 2t dt \\ t dt = \frac{1}{2} dv \end{array} \right] = -\frac{3}{5} \cdot \int \frac{du}{u} + \frac{3}{10} \cdot \int \frac{dv}{v} - \frac{1}{5} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \ln |u| + \frac{3}{10} \cdot \ln |v| - \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} t + c$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \ln |t+2| + \frac{3}{10} \cdot \ln |1+t^2| - \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} t + c$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \ln |\operatorname{tg} x + 2| + \frac{3}{10} \cdot \ln |1 + \operatorname{tg}^2 x| - \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x) + c$$

0.3.2 Integracija proizvoda trigonometrijskih, eksponencijalnih i polinomnih funkcija

1. Rešiti integrale.

(a) $\int (x+1) \cos 2x dx$. \int $P_1(x) = x+1$ $\beta = 2$
 $m = 1$

Rešenje. Dati integral je oblika $\int P(x) \cos \alpha x dx$, pa koristimo parcijalnu integraciju

$$u = x+1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos 2x dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

gde se integral kod v svodi na tablični uvođenjem smene $2x = t$, odakle je $dx = \frac{dt}{2}$. Primitimo da je za u uzet polinom, a ne trigonometrijska funkcija, jer je izvod polinoma polinom manjeg stepena. U ovom slučaju imamo

$$\int (x+1) \cos 2x dx = \frac{1}{2}(x+1) \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}(x+1) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$\int \sin 2x dx$$

$$2x = t$$

$$2 dx = dt$$

$$dx = \frac{1}{2} dt$$

U poslednjem koraku kod računanja integrala ponovo smo koristili smenu $2x = t$.

$$(b) \int (x^2 + 1)e^{3x} dx. \quad \textcircled{2^o} \quad P_2(x) = x^2 + 1, \quad n = 2, \quad \alpha = 3$$

Rešenje. Integral je oblika $\int P(x)e^{\alpha x} dx$ i može se rešiti primenom parcijalne integracije. Za

$$\begin{aligned} u = x^2 + 1 &\Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{3x} dx &\Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}, \end{aligned}$$

gde se integral kod v izračunava uvođenjem smene $3x = t$, odakle je $dx = \frac{dt}{3}$. Sledi

$$\int (x^2 + 1)e^{3x} dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)e^{3x} - \frac{2}{3} \int xe^{3x} dx.$$

Da bismo rešili poslednji integral ponovo koristimo parcijalnu integraciju, i to

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} dx &\Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}, \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1)e^{3x} dx &= \frac{1}{3}(x^2 + 1)e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) \\ &= \frac{1}{3}(x^2 + 1)e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C. \end{aligned}$$

Primitimo da je, slično kao i u prethodnom zadatku, kod obe primene parcijalne integracije za u biran polinom, a posledica je da se u oba koraka stepen polinoma pod integralom smanjivao.

$$(c) \int e^{2x} \sin 3x dx. \quad \textcircled{3^o} \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3$$

Rešenje. Integrali oblika $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$ se takođe rešavaju parcijalnom integracijom. Uzmimo

$$\begin{aligned} u = e^{2x} &\Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ dv = \sin 3x dx &\Rightarrow v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x, \end{aligned}$$

gde, kao i u prethodnom primeru, kod rešavanja integrala kod v koristimo smenu $3x = t$. Dalje važi

$$\int e^{2x} \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x \, dx.$$

Koristeći ponovo parcijalnu integraciju sa

$$\begin{aligned} u = e^{2x} &\Rightarrow du = 2e^{2x} \, dx \\ dv = \cos 3x \, dx &\Rightarrow v = \int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \sin 3x, \end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} I = \int e^{2x} \sin 3x \, dx &= -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x \, dx \right) \\ &= -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x \, dx, \end{aligned}$$

gde se kao jedina nepoznata pojavljuje početni integral. Ako označimo sa $I = \int e^{2x} \sin 3x \, dx$, poslednja jednačina postaje

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9}I. \quad I + \frac{4}{9}I = \frac{2}{9}e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x$$

Rešavanjem jednačine po I dobijamo konačno rešenje

$$I = -\frac{3}{13}e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x} \sin 3x + C.$$

Napomenimo da u ovom primeru kod dve primene parcijalne integracije nije bitno da li će se trigonometrijska ili eksponencijalna funkcija birati za u , ali jeste bitno da u oba koraka bude odabrana funkcija istog tipa. Ukoliko bismo, na primer, kod druge parcijalne integracije u našem rešenju uzeli $u = \cos 3x$ i $dv = e^{2x} \, dx$, u sledećem koraku bismo dobili $I = I$, to jest, vratili bismo se na početak zadatka.

Beleške

PRIMER. REŠITI INTEGRAL $\int \frac{e^x dx}{4 + e^{2x}}$

$$\textcircled{1^\circ} R(e^x) = \frac{e^x}{4 + e^{2x}}$$

SMENA: $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int \frac{e^x dx}{4 + e^{2x}} = \int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C$$

$$e^{2x} = (e^x)^2 = t^2 \quad 4^2 = 2^2$$

PRIMER. REŠITI INTEGRAL

$$\int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\int \frac{\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx = \int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^5 x \sqrt{1 + \cos^2 x}} = \int \frac{\sin^4 x \cdot \sin x}{\cos^5 x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx =$$

$$= \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^5 x \sqrt{1 + \cos^2 x}} \cdot \sin x dx =$$

$$= \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^5 \sqrt{1 + t^2}} dt$$

LUK. IERAC.
FUNK.

$$\Rightarrow \left(t = \frac{1}{\cos} \right)$$

NOVA SMENA

$$\Rightarrow \cos x = t$$

$$\rightarrow \sin x dx = dt$$

Beleške