Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Određeni integral - definicija, osobine, geometrijska interpretacija i način izračunavanja

Radna nedelja br. 4

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \quad F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x)\,dx = \ ?$$

Glava 1

Određeni integral

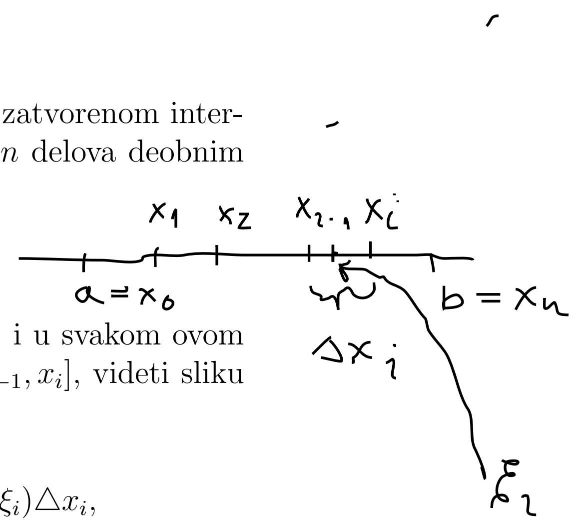
1.1 Definicija i osobine

Određeni ili Rimanov[1] integral predstavlja jedan od najvažnijih pojmova matematičke analize.

1.1.1 Definicija određenog integrala

Neka je $f(x)$ funkcija koja je definisana i ograničena na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Podelimo interval $[a, b]$ na proizvoljan način na n delova deobnim tačkama x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tako da je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$



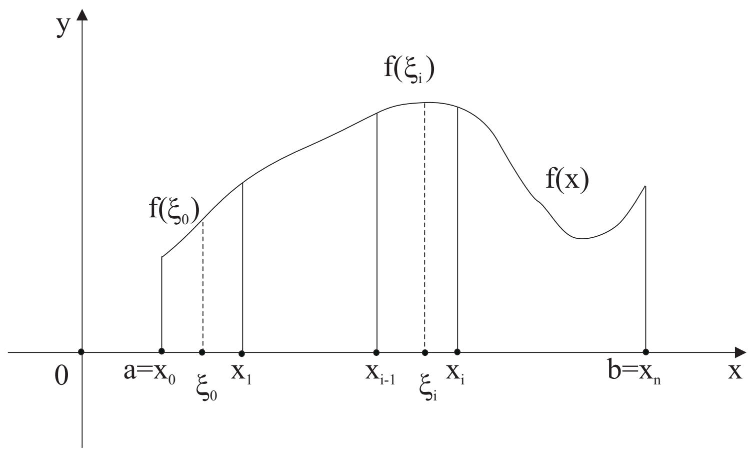
Označimo sa $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ dužinu podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ i u svakom ovom podintervalu na proizvoljan način izaberemo tačku $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, videti sliku 1.1. Zbir formiran na sledeći način

$$f(\xi_1)\triangle x_1 + f(\xi_2)\triangle x_2 + \ldots + f(\xi_n)\triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i,$$

zovemo **integralna** ili **Rimanova** suma funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Određeni integral definišemo kao graničnu vrednost integralne sume (ako postoji!) kada masimum dužine podintervala $\triangle x_i$ teži nuli, nezavisno od podele

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann - nemački matematičar, 1826-1866



Slika 1.1: Geometrijski prikaz formiranja integralne sume.

intervala $[a, b]$ i izbora tačaka ξ_i. Određeni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ zapisujemo na sledeći način

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i,$$

i kažemo da je $f(x)$ **integrabilna** na $[a, b]$ ako granična vrednost postoji. Broj a naziva se **donja granica integracije**, dok je b **gornja granica integracije**.

Sledeću teoremu i njenu posledicu o egzistenciji određenog integrala navodimo bez dokaza.

Teorema 1 *Ako je funkcija $f(x)$ definisana, ograničena i ima konačno mnogo tačaka prekida na intervalu $[a, b]$, onda je $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$.*

Posledica 1 *Neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu je integrabilna na tom intervalu.*

1.1.2 Osobine određenog integrala

Na osnovu definicije određenog integrala, lako se mogu pokazati sledeće osobine.

1. Neka su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne funkcije na intervalu $[a, b]$, a α i β konstante. Tada važi:

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx \pm \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

2. Neka je $f(x)$ integrabilna funkcija na intervalu $[a, b]$. Tada važi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

3. Za proizvoljnu funkciju $f(x)$ važi da je

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

4. Neka je $f(x)$ integrabilna na intervalima $[a, b]$, $[a, c]$ i $[b, c]$. Tada važi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5. Neka je $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$, a $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Tada važi:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

6. Neka su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne funkcije na $[a.b]$ i neka je $f(x) \leq g(x)$ za svako $x \in [a, b]$. Tada važi:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teorema 2 *(Teorema o srednjoj vrednosti integrala) Neka je $f(x)$ integrabilna i neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Tada postoji tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Srednja verdnost funkcije na intervalu. Na osnovu definicije određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ i birajući ekvidistantnu podelu intervala $[a, b]$, tako da je $\triangle x_i = \dfrac{b-a}{n}$, važi sledeća aproksimacija

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(\xi_1)\frac{b-a}{n} + \ldots + f(\xi_n)\frac{b-a}{n} = (b-a)\frac{f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_n)}{n},$$

SREDNJA VREDNOST FUNKCIJE

odnosno,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_n)}{n}.$$

Iz poslednje relacije sledi da izraz

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

predstavlja srednju vrednost funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

1.2 Izračunavanje određenog integrala, Njutn - Lajbnicova formula

Njutn[2]-Lajbnizova[3] formula definiše jednu od najvažnijih veza u matematičkoj analizi. Određuje vezu između određenog i neodređenog integrala i omogućava izračunavanje određenog integrala.

Teorema 3 *(Njutn-Lajbnicova teorema) Neka je $f(x)$ neprekidna i integrabilna funkcija na intervalu $[a,b]$. Tada važi:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

gde je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$ na $[a,b]$, tj. $\int f(x)\,dx = F(x)+C$.

Dokaz. Posmatrajmo funkciju definisanu na sledeći način:

$$G(x) = \int_a^x f(u)\,du, \quad x \in [a,b].$$

Pokažimo da je $G(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$ na $[a,b]$. Na osnovu definicije prvog izvoda sledi da je

$$-G(x) = -\int_a^x f(u)du = \int_x^a f(u)du$$

$$G'(x) = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{G(x+\triangle x)-G(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\triangle x}\left(\int_a^{x+\triangle x} f(u)\,du + \int_x^a f(u)\,du\right) =$$

[2]Sir Isaac Newton - engleski matematičar, 1642-1727

[3]Gottfried Wilhelm von Leibniz - nemački matematičar, 1646-1716

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_x^a f(u)du + \int_a^{x+\Delta x} f(u)du\right) =$$

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du \xrightarrow{\text{postoji } \xi} \; = f(\xi)\cdot\cancel{\Delta x}$$

$$= \lim_{\triangle\to 0}\frac{1}{\triangle x}\int_x^{x+\triangle x} f(u)\,du.$$

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti integrala (Teorema 2) sledi da postoji $\xi \in (x, x+\triangle x)$ tako da važi

$x \quad \xi \quad x+\Delta x$

$$G'(x) = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\cancel{\triangle x}} f(\xi)\cancel{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} f(\xi).$$

$\Delta x \to 0$

$\Downarrow$

$\xi = x$

Neprekidnost funkcije $f(x)$ implicira da je

$$\lim_{\triangle x\to 0} f(\xi) = f(x),$$

odnosno važi da je $\boxed{G'(x) = f(x)}$, tj. $G(x)$ je primitivna funkcija za $f(x)$. Dakle, funkcije $F(x)$ i $G(x)$ su primitivne za istu funkciju $f(x)$, a to znači da se mogu razlikovati samo za konstantu, tj. $F(x) + c = G(x)$, gde je c odgovarajuća konstanta. Time smo pokazali da važi:

$$F(x) + c = \int_a^x f(u)\,du. = G(x)$$

Specijalno, za $x = a$ dobijamo

$$F(a) + c = \int_a^a f(u)\,du = 0,$$

odnosno $c = -F(a)$. S druge strane, za $x = b$ dobijamo

$$F(b) + c = \int_a^b f(u)\,du,$$

odnosno, uvrštavanjem vrednosti za c, konačno dobijamo Njutn-Lajnicovu formulu

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

□

PRIMER IZRAČUNATI INTEGRAL

x = 1 x = 0

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 5)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 5 - 0 = \frac{2 - 9 + 30}{6} = \frac{23}{6}$$

1.2.1 Smena promenljivih kod određenog integrala

Posmatrajmo integral $\int_a^b f(x)\,dx$, gde je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Novu promenljivu t uvodimo pomoću veze $x = \varphi(t)$, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

- $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$ za neke brojeve α i β,
- $\varphi(t)$ i $\varphi'(t)$ su neprekdine funkcije na intervalu $[\alpha, \beta]$,
- $f(\varphi(t))$ je definisana i neprekidna na intervalu $[\alpha, \beta]$.

Tada važi formula za uvođenje smene u određeni integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}.$$

d/ $x = \varphi(t)$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

Naime, uvođenjem smene $x = \varphi(t)$ u neodređeni integral dobićemo da je

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)),$$

gde je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$. Na osnovu Njutn-Lajbnicove teoreme, dobijamo formulu za uvođenje smene

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

1.2.2 Parcijalna integracija kod određenog integrala

Neka su funkcije $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ i $v'(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom $[a, b]$. Tada važi sledeća formula za parcijalnu integraciju kod određenog integrala:

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.}$$

Na osnovu pravila za izvod proizvoda dve funkcije sledi

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Primenjujući određeni integral na prethodnu jednakost dobija se

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx,$$

što dokazuje formulu za parcijalnu integraciju.

PRIMER IZRAČUNATI INTEGRAL

$$\int_1^2 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_3^5 \sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_3^5 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}}\Bigg|_3^5 =$$

$\boxed{2x+1=t}$ $\to x=1 \Rightarrow t=3$

$x=2 \Rightarrow t=5$

$2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$

$$= \frac{1}{3}\,t^{3/2}\Big|_3^5 = \frac{1}{3}\left(5^{3/2}-3^{3/2}\right)$$

1.3 Primena određenog integrala

Određeni integral ima široko polje primene koje obuhvata skoro sve oblasti nauke i tehnike. U nastavku ćemo se ograničiti samo na primene vezano za izračunavanje nekih geometrijskih veličina kao što su površina ravne figure, dužina luka krive, zapremina i površina obrtnog tela.

$$= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)$$

1.3.1 Izračunavanje površine ravnih figura

Posmatrajmo pozitivnu i neprekidnu funkciju $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Integralna suma određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ ima oblik

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i,$$

gde je $f(\xi_i)\triangle x_i$ opšti član ove sume. U geometrijskom smislu, izraz $f(\xi_i)\triangle x_i$ predstavlja površinu pravougaonika čije stranice su $f(\xi_i)$ i $\triangle x_i$, videti sliku 1.2. S predstavlja sumu površina svih pravougaonika nad intervalom $[a, b]$, što je aproksimacija površine **krivolinjskog trapeza** ograničenog krivom $y = f(x)$ i pravama $y = 0$, $x = a$ i $x = b$. U graničnom slučaju, kada $\max\triangle x_i \to 0$, S postaje tačna površina krivolinijskog trapeza P, odnosno imajući u vidu definiciju određenog integrala sledi

$$P = \lim_{\max\triangle x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ako za neprekidnu funkcju $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, c]$ i $f(x) \leq 0$ za $x \in [c, b]$, videti sliku 1.3 a), površina ograničena grafikom funkcije $y = f(x)$ i pravama $x = a$, $x = b$ i $y = 0$ se može izračunati kao

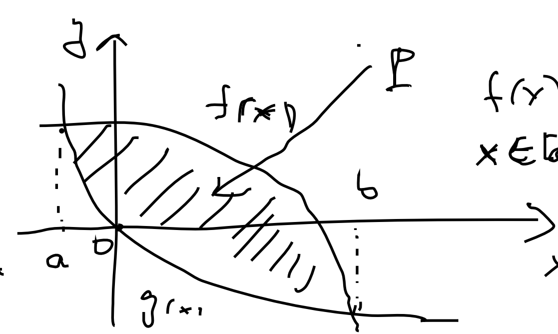
$$P = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

Neka su neprekidne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ takve da važi da je $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a, b]$. Površinu P ograničenu graficima funkcija $f(x)$ i $g(x)$, videti sliku 1.3 b), možemo da izračunamo na sledeći način

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

GORNJA GRANICA

DONJA GRANICA



$f(x) \geq g(x)$

$x \in [a, b]$

PRIMER NEKA JE

$v(t) = t^2 - 2t + 5$ BRZINA (TRENUTNA) VOZILA u TRENUTKU t.

ODREDITI DUŽINU PREĐENOG PUTA ZA $t \in [1,3]$.

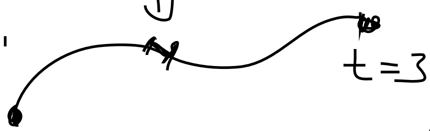
$$L = \int_1^3 \overbrace{v(t)\cdot dt}^{(*)} = \int_1^3 \Delta s$$

$(*) = v(t)\cdot \Delta t = \frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot \Delta t = \Delta s$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$

DEO PREĐENOG PUTA U TRENUTKU t $[t, t+\Delta t]$

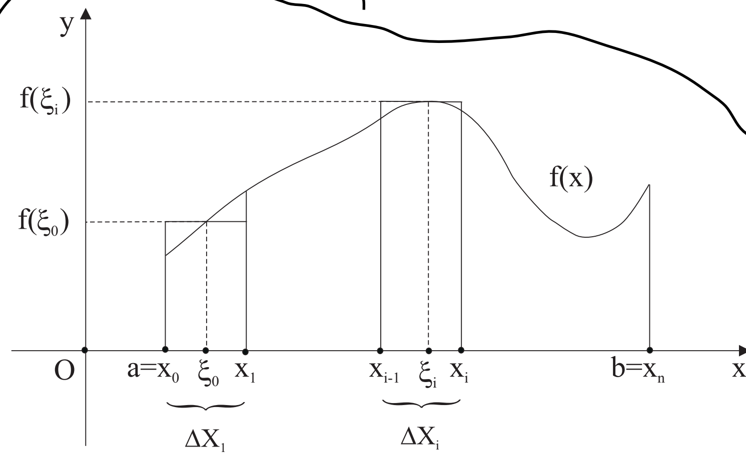
Δs



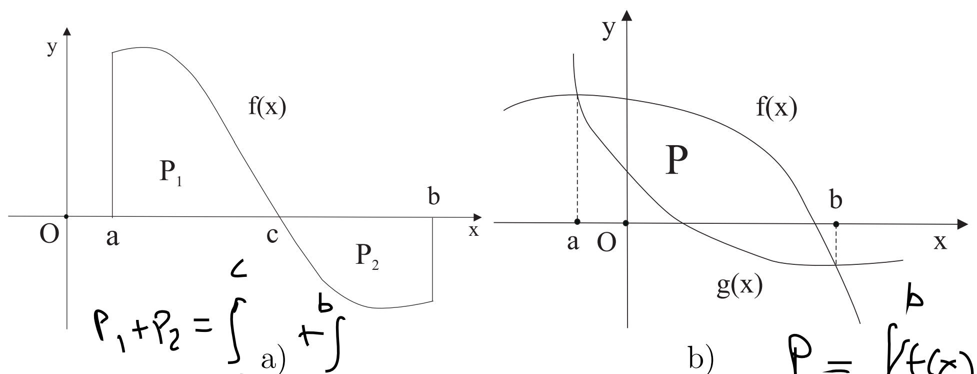
$t=3$

$t=1$

$$L = \int_1^3 (t^2 - 2t + 5)\,dt = \ldots$$



Slika 1.2: Krivolinijski trapez određen funkcijom $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$.



$P_1 + P_2 = \int_a^c + \int_c^b$

$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

Slika 1.3: Različiti oblici i položaji ravnih figura.

Funkcija može biti zadata u **parametarskom obliku**. Pretpostavimo da je eksplicitno zadata funkcija $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ zadata i u parametarskom obliku pomoću funkcija $x = x(t)$ i $y = y(t)$ za $t_0 \le t \le t_1$. Neka su $A(x(t_0), y(t_0))$ i $B(x(t_1), y(t_1))$ koordinate početne i krajnje tačke ove krive i neka su $y(t) \ge 0$ i $\dot{x}(t)$ neprekidne na intervalu $[t_0, t_1]$. Tada površinu P ograničenu krivom $x = x(t)$, $y = y(t)$ i pravama $x = x(t_0)$, $x = x(t_1)$ i $y = 0$, videti sliku 1.4, možemo izračunati uvođenjem smene $x = x(t)$ u integral $\int_a^b y(x)\,dx$, odnosno

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$

$x = x(t) \Rightarrow dx = \dot{x}(t)dt$

$$P = \int_a^b y(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} y(x(t))\overbrace{\dot{x}(t)\,dt}^{dx} = \underline{\int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)\,dt}, \text{ gde je } \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}.$$

EKSPLICITNI OBLIK

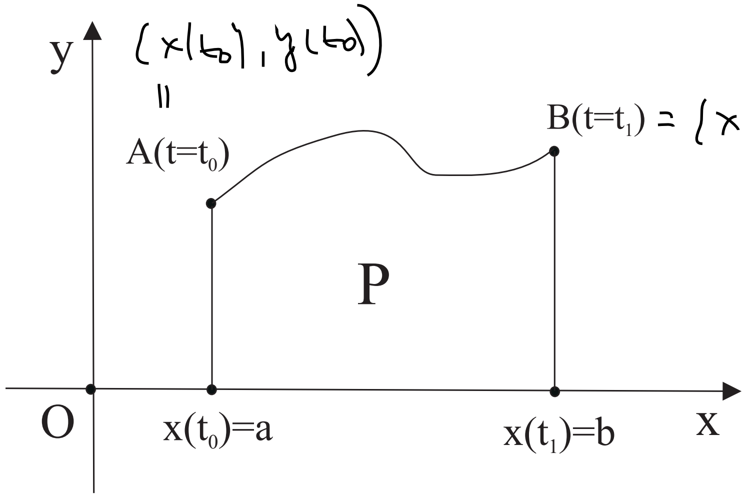
$y = f(x)$

$x \in [a,b]$

PARAMETARSKI OBLIK

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$P = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)\,dt$$



$(x(t_0), y(t_0))$ $\parallel$

$= (x(t_1), y(t_1))$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t_0 \le t \le t_1$$

Slika 1.4: Krivolinijski trapez određen parametarski zadatom funkcijom $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1.4 Zadaci za vežbanje

1.4.1 Određeni integral: definicija, smena promenljivih i parcijalna integracija

1. Izračunati sledeće integrale:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx$

   Rešenje:

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)\ dx = \int_{-1}^{1}\ dx - \int_{-1}^{1} x^2\ dx$$

$$= x\ \Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\ \Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1) - \frac{1}{3} \cdot (1 - (-1)) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

   (b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\ dx$

Rešenje:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2} \; dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \; dx\right)$$

$$\left[\begin{array}{llll} \text{smena}: & t = 2x & \text{granice}: & x = 0 \to t = 0 \\ & dt = 2 \; dx & & x = \frac{\pi}{4} \to t = \frac{\pi}{2} \\ & dx = \frac{1}{2} \; dt & & \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \; dt\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

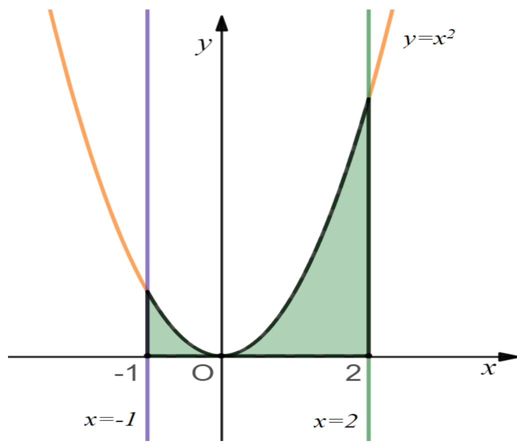
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right] = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

1.4.2 Površina ravne figure

1. Odrediti površinu figure ograničene sledećim krivama:

   (a) parabolom $y = x^2$ i pravama $x = -1,\ x = 2$ i $x-$osom.

   Rešenje: Figuru čiju površinu trebamo odrediti predstavljena je



$$P = \int_{-1}^{2} x^2\, dx$$

Slika 1.5: Figura u ravni iz zadatka pod (a).

kao osenčeni deo ravni na Slici 1.5. Kako je figura ograničena pravama $x = -1$ i $x = 2$, pri čemu je $y = x^2 \geq 0$, tada je tražena površina figure određena na sledeći način:

$$P = \int_{-1}^{2} x^2\ dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$

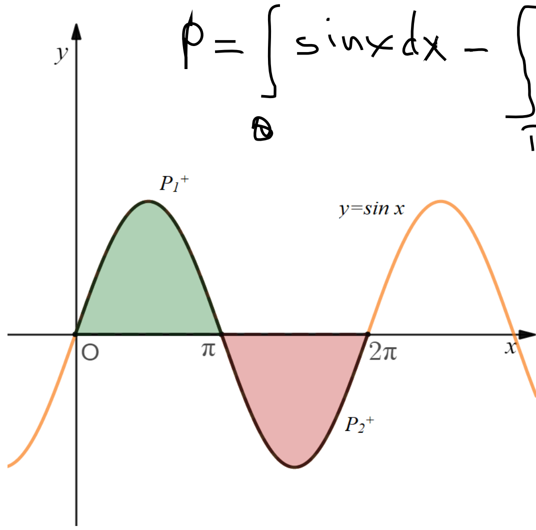
   (b) sinusoidom $y = \sin x$ i $x-$osom za $0 \leq x \leq 2\pi$.

   Rešenje: Tražena površina sastoji se od površine $P_1^+ :\ x \in [0, \pi],\ y = \sin x \geq 0$, i površine $P_2^- :\ \ x \in [\pi, 2\pi],\ \ y = \sin x \leq 0$ (Slika 1.6).

Shodno tome, imamo sledeće:

$$\begin{aligned}
P = P_1^+ + P_2^- &= \int\limits_0^{\pi} \sin x \ dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x \ dx \\
&= -\cos x \ \Big|_0^{\pi} - \Big(-\cos x \ \Big|_{\pi}^{2\pi} \Big) = -\cos x \ \Big|_0^{\pi} + \cos x \ \Big|_{\pi}^{2\pi} \\
&= -(\cos \pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos \pi) \\
&= -(-1-1) + (1-(-1)) = 2+2 = 4.
\end{aligned}$$

$$P = \int\limits_{0}^{\pi} \sin x \, dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$



Slika 1.6: Figura u ravni iz zadatka pod (b).

(c) parabolom $y = 2x - x^2$ i pravom $y = -x$.

Rešenje: Figura čiju površinu tražimo predstavlja osenčeni deo ravni na Slici 1.7. Kako bismo odredili interval integracije, prvo treba odrediti presečne tačke grafika funkcija koje ograničavaju posmatranu figuru. Otuda, njihovim izjednačavanjem imamo

$$2x - x^2 = -x \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3,$$

$y = -x \wedge y = 2x - x^2$

$\Downarrow$

$2x - x^2 = -x$

$\Downarrow$

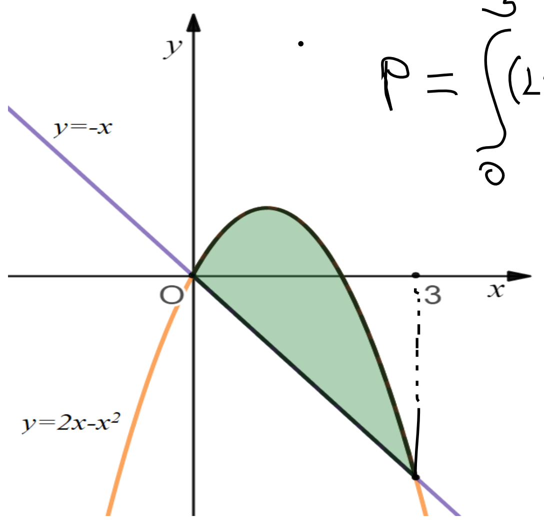
$3x - x^2 = 0$

$\Downarrow$

$x(3 - x) = 0$

$\Downarrow$

$x = 0 \vee x = 3$



$P = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))\, dx =$

$= \int_0^3 (2x - x^2 + x)\, dx = \dots$

Slika 1.7: Figura u ravni iz zadatka pod (c).

što, zajedno sa $2x - x^2 \geq -x$ za $x \in [0, 3]$, daje sledeće:

$$P = \int_0^3 \left[2x - x^2 - (-x)\right]\, dx = \int_0^3 \left(2x - x^2 + x\right)\, dx$$

$$= \int_0^3 \left(3x - x^2\right)\, dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3$$

$$= 3 \cdot \frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3} = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}.$$

Beleške

Beleške