



Univerzitet u Novom Sadu  
Fakultet tehničkih nauka



PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)  
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

## BELEŠKE SA PREDAVANJA

Primena određenog integrala - izračunavanje površine ravnog lika, zapremine rotacionog tela i dužine luka krive.

Radna nedelja br. 5

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

## 0.1 Primena određenog integrala

Određeni integral ima široko polje primene koje obuhvata skoro sve oblasti nauke i tehnike. U nastavku ćemo se ograničiti samo na primene vezano za izračunavanje nekih geometrijskih veličina kao što su površina ravne figure, dužina luka krive, zapremina i površina obrtnog tela.

### 0.1.1 Izračunavanje površine ravnih figura

Posmatrajmo pozitivnu i neprekidnu funkciju  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ . Integralna suma određenog integrala  $\int_a^b f(x) dx$  ima oblik

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

gde je  $f(\xi_i) \Delta x_i$  opšti član ove sume. U geometrijskom smislu, izraz  $f(\xi_i) \Delta x_i$  predstavlja površinu pravougaonika čije stranice su  $f(\xi_i)$  i  $\Delta x_i$ , videti sliku 1.  $S$  predstavlja sumu površina svih pravougaonika nad intervalom  $[a, b]$ , što je aproksimacija površine **krivolinjskog trapeza** ograničenog krivom  $y = f(x)$  i pravama  $y = 0$ ,  $x = a$  i  $x = b$ . U graničnom slučaju, kada  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ,  $S$  postaje tačna površina krivolinijskog trapeza  $P$ , odnosno imajući u vidu definiciju određenog integrala sledi

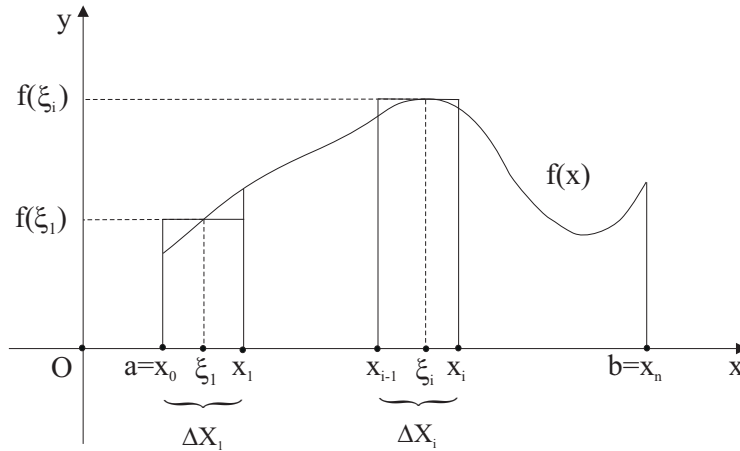
$$P = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Ako za neprekidnu funkciju  $f(x) \geq 0$  za  $x \in [a, c]$  i  $f(x) \leq 0$  za  $x \in [c, b]$ , videti sliku 2 a), površina ograničena grafikom funkcije  $y = f(x)$  i pravama  $x = a$ ,  $x = b$  i  $y = 0$  se može izračunati kao

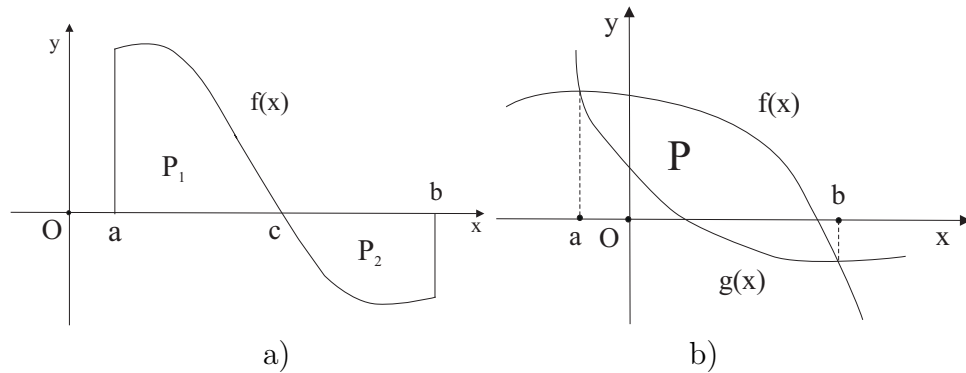
$$P = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$$

Neka su neprekidne funkcije  $f(x)$  i  $g(x)$  takve da važi da je  $f(x) \geq g(x)$  za  $x \in [a, b]$ . Površinu  $P$  ograničenu graficima funkcija  $f(x)$  i  $g(x)$ , videti sliku 2 b), možemo da izračunamo na sledeći način

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



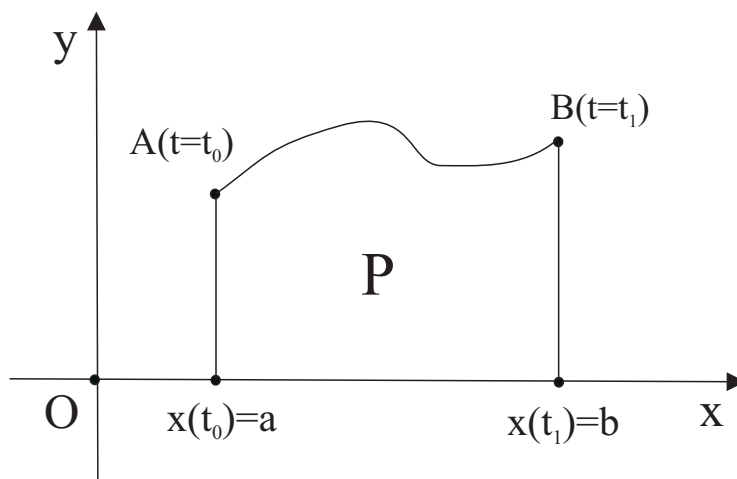
Slika 1: Krivolinijski trapez određen funkcijom  $f(x)$  nad intervalom  $[a, b]$ .



Slika 2: Različiti oblici i položaji ravnih figura.

Funkcija može biti zadata u **parametarskom obliku**. Pretpostavimo da je eksplicitno zadata funkcija  $y = y(x)$ ,  $x \in [a, b]$  zadata i u parametarskom obliku pomoću funkcija  $x = x(t)$  i  $y = y(t)$  za  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Neka su  $A(x(t_0), y(t_0))$  i  $B(x(t_1), y(t_1))$  koordinate početne i krajnje tačke ove krive i neka su  $y(t) \geq 0$  i  $\dot{x}(t)$  neprekidne na intervalu  $[t_0, t_1]$ . Tada površinu  $P$  ograničenu krivom  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  i pravama  $x = x(t_0)$ ,  $x = x(t_1)$  i  $y = 0$ , videti sliku 3, možemo izračunati uvodeđenjem smene  $x = x(t)$  u integral  $\int_a^b y(x) dx$ , odnosno

$$P = \int_a^b y(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} y(x(t)) \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt, \quad \text{gde je } \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}.$$



Slika 3: Krivolinijski trapez određen parametarski zadatom funkcijom  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

### 0.1.2 Izračunavanje zapremine obrtnih tela

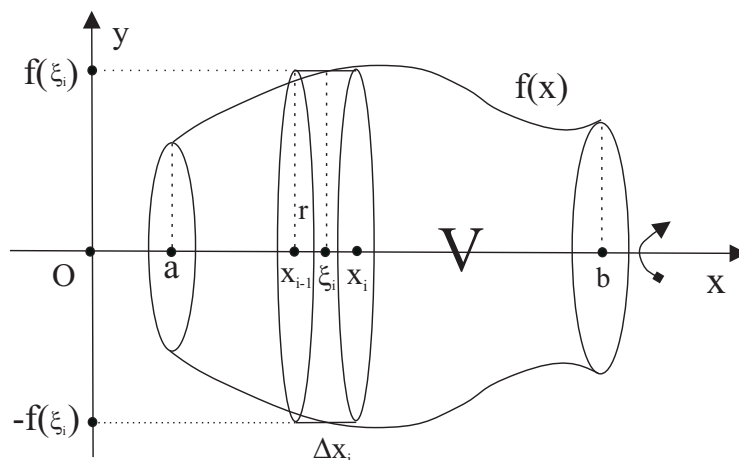
Posmatrajmo funkciju  $y = f(x)$  koja je neprekidna na intervalu  $[a, b]$ . Obrtanjem krive  $y = f(x)$  oko  $x$ -ose dobijamo površ koja zajedno sa ravnima  $x = a$  i  $x = b$  obrazuje obrtno telo zapremine  $V$ . Presek ovog obrtnog tela sa ravni, koja je normalna na  $x$ -osu i koja prolazi kroz tačku  $A(x, 0)$ , je krug sa centrom u tački  $A$  i poluprečnika  $r = f(x)$ . Dakle, površinu ovog kruga možemo izraziti funkcijom  $S(x) = \pi f^2(x)$ , koja je neprekidna na  $[a, b]$ . Podelimo interval  $[a, b]$  na  $n$  delova:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Za porizvoljno izabrane tačke  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  formirajmo sledeću integralnu sumu

$$\sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i, \text{ gde je } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Primetimo da opšti član ove sume  $S(\xi_i) \Delta x_i$  predstavlja zapreminu pravog cilindra sa bazom  $S(\xi_i)$  i visinom  $\Delta x_i$ , videti sliku 4, što ujedno predstavlja i zapreminu jednog segmenta posmatranog obrtnog tela. U graničnom slučaju, kada  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , ova suma će težiti zaprimini obrtnog tela  $V$ . Dakle, možemo



Slika 4: Zapremina obrtnog tela.

pisati

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i = V.$$

Poslednja granična vrednost integralne sume postoji, jer je funkcija  $S(x)$  neprekidna. Na osnovu definicije određenog integrala, sledi sledeća formula za izračunavanje zapremine obrtnog tela

$$V = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Neka je kriva  $y = f(x)$  za  $x \in [a, b]$  zadata u parametarskom obliku pomoću funkcija  $x = x(t)$  i  $y = y(t)$  za  $t \in [t_0, t_1]$ , gde je  $A(a, f(a)) = (x(t_0), y(t_0))$  i  $B(b, f(b)) = (x(t_1), y(t_1))$ . Iz formule za izračunavanje zapremine obrtnog tela, uvođenjem smene  $x = x(t)$ , dobijamo odgovarajuću formulu za parametarski zadatau funkciju

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} f^2(x(t)) \dot{x}(t) dt = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) \dot{x}(t) dt.$$

### 0.1.3 Izračunavanje dužine luka krive

Neka je  $f(x)$  diferencijabilna funkcija i  $f'(x)$  neprekidna na intervalu  $[a, b]$ . Tačke  $A(a, f(a))$  i  $B(b, f(b))$  predstavljaju početnu i krajnju tačku ove krive.

Podelimo luk krive  $y = f(x)$  između tačkaka  $A$  i  $B$  deobnim tačkama

$$M_0 = A, M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B,$$

gde koordinate tačkaka  $M_i$  obeležićemo sa  $(x_i, f(x_i))$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ , videti sliku 5. Dužina duži koja spaja tačke  $M_{i-1}$  i  $M_i$  je

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

gde su  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  i  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$  za  $i = 1, \dots, n$ . Dužinu  $\Delta l_i$  možemo napisati i na sledeći način

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \Delta x_i.$$

Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti primenjena na neprekidnu i diferencijabilnu funkciju  $f(x)$  na intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  garantuje postojanje broja  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ , tako da važi

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

odnosno

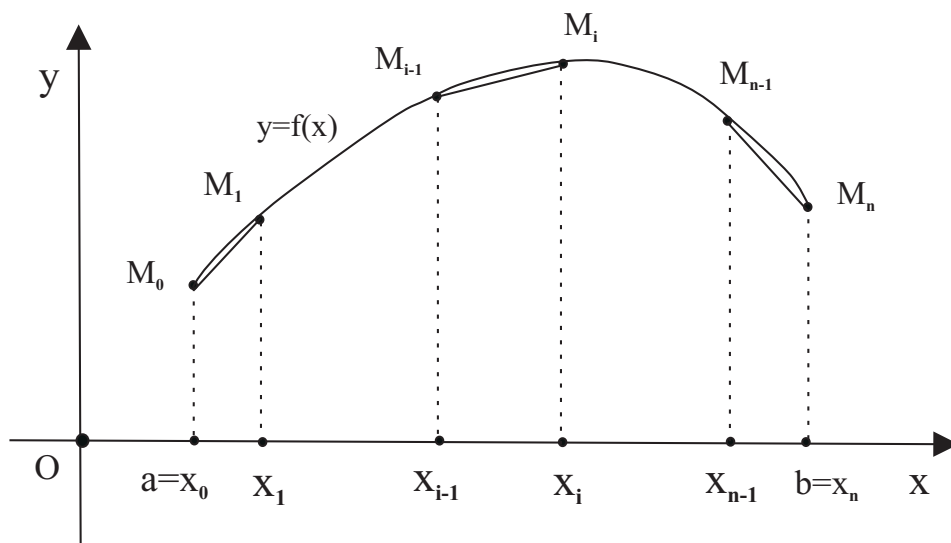
$$\Delta l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Izlomljena linija  $M_0, M_1, \dots, M_n$ , čija je dužina jednaka  $\sum_{i=1}^n \Delta l_i$ , predstavlja jednu aproksimaciju dužine luka krive između tačkaka  $A$  i  $B$ . U graničnom slučaju, kada  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , ova izlomljena linija postaje baš kriva funkcije između tačkaka  $A$  i  $B$ . Dakle, za dužinu luka krive  $y = f(x)$  za  $x \in [a, b]$  možemo pisati

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Primetimo da je posmatrani zbir integralna suma neprekidne funkcije  $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ . Iz ovoga sledi da poslednja granična vrednost postoji i može se zapisati u obliku određenog integrala na sledeći način

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$



Slika 5: Dužina luka krive.

što predstavlja formulu za izračunavanje dužine luka krive  $y = f(x)$  za  $a \leq x \leq b$ .

Neka je posmatrana kriva  $y = f(x)$  za  $x \in [a, b]$  zadata u parametarskom obliku:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  gde je  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Tada se tačke  $A(a, f(a))$  i  $B(b, f(b))$  dobijaju za izbore parametra  $t = t_0$  i  $t = t_1$ , respektivno. Pretpostavimo da su funkcije  $\dot{x}(t)$  i  $\dot{y}(t)$  neprekidne na posmatranom intervalu. Formulu za izračunavanje dužine luka parametarski zadate krive možemo da izvedemo uvođenjem smene  $x = x(t)$  u prethodnu formulu:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2} \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt,$$

primetimo da je  $\dot{x}(t) \geq 0$ , jer iz  $a \leq x(t) \leq b$  sledi da  $x(t)$  mora biti nerastuća funkcija.

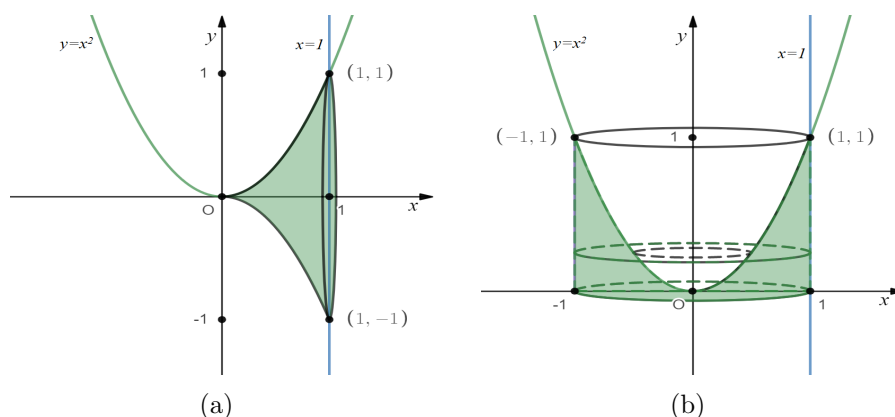
## 0.2 PRIMERI

### 0.2.1 Zapremina obrtnog tela

1. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure ograničene parabolom  $y = x^2$  i pravama  $x = 0$ ,  $x = 1$  i  $y = 0$

(a) oko  $x$ -ose;

(b) oko  $y$ -ose.



Slika 6: Telo dobijeno rotacijom definisane figure oko (a)  $x$ -ose; (b)  $y$ -ose.

**Rešenje:** (a) Telo čiju zapreminu tražimo predstavljeno je na Slici 6(a) i njegovu zapreminu određujemo na sledeći način:

$$V = \pi \cdot \int_0^1 y(x)^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \cdot (1^5 - 0^5) = \frac{\pi}{5}.$$

(b) S obzirom da je posmatrano telo određeno rotacijom figure oko  $y$ -ose neophodno je prethodno odrediti inverznu funkciju funkcije  $f(x) = x^2$ , odnosno funkciju  $g(y) = f^{-1}(x^2)$ . Tako za  $f(x) = x^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , koristeći relaciju  $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ , imamo da je odgovarajuća inverzna funkcija određena sa  $g(y) = \sqrt{y} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Dalje, kao što se sa Slike 6(b) može uočiti, imamo da tražena zapremina predstavlja razliku zapremina tela koja nastaju rotacijom prave  $x = 1$  i krive  $g(y) = \sqrt{y}$ ,  $y \in$

$[0, 1]$  oko  $y$ -ose. Tada imamo sledeće:

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 - V_2 = \pi \cdot \int_0^1 1^2 dy - \pi \cdot \int_0^1 g(y)^2 dy \\
 &= \pi \cdot \int_0^1 dy - \pi \cdot \int_0^1 \sqrt{y}^2 dy = \pi \cdot \int_0^1 dy - \pi \cdot \int_0^1 y dy \\
 &= \pi \cdot \left( y \Big|_0^1 - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \pi \cdot \left( 1 - 0 - \frac{1}{2} \cdot (1^2 - 0^2) \right) \\
 &= \pi \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

2. Odrediti zapreminu elipsoida koje nastaje rotacijom elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  oko  $x$ -ose.

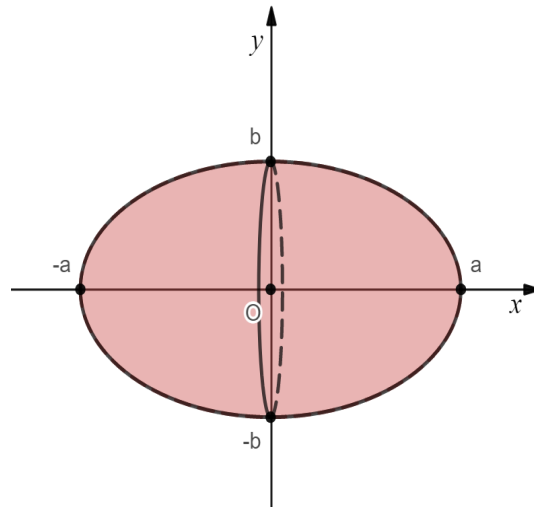
**Rešenje:** Da bismo odredili zapreminu posmatanog tela, odnosno elipsoida neophodno je prethodno jednačinu elipse predstaviti kao familju odgovarajućih krivih određenih na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \\
 \Leftrightarrow y^2 &= b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \Leftrightarrow y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},
 \end{aligned}$$

gde grafici funkcija  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  i  $y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  određuju gornju, pozitivnu (odnosno iznad  $x$ -ose) i donju, negativnu (ispod  $x$ -ose) granu odgovarajuće elipse. Posmatrani elipsoid je tada određen rotacijom oko  $x$ -ose figure ograničene gornjom granom elipse (to jest grafikom funkcije

$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ,  $-a \leq x \leq a$ ) i  $x$ -osom (Slika 2), odakle dalje imamo:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \cdot \int_{-a}^a y(x)^2 dx = \pi \cdot \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\
 &= b^2 \pi \cdot \left( \int_{-a}^a dx - \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \right) = b^2 \pi \cdot \left( \int_{-a}^a dx - \frac{1}{a^2} \cdot \int_{-a}^a x^2 dx \right) \\
 &= b^2 \pi \cdot \left( x \Big|_{-a}^a - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^a \right) = b^2 \pi \cdot \left[ a - (-a) - \frac{1}{a^2} \cdot \left( \frac{a^3}{3} - \frac{(-a)^3}{3} \right) \right] \\
 &= b^2 \pi \cdot \left[ a + a - \frac{1}{a^2} \cdot \left( \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} \right) \right] = b^2 \pi \cdot \left( 2a - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2a^3}{3} \right) \\
 &= b^2 \pi \cdot \left( 2a - \frac{2a}{3} \right) = b^2 \pi \cdot \frac{4a}{3} = \frac{4ab^2\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

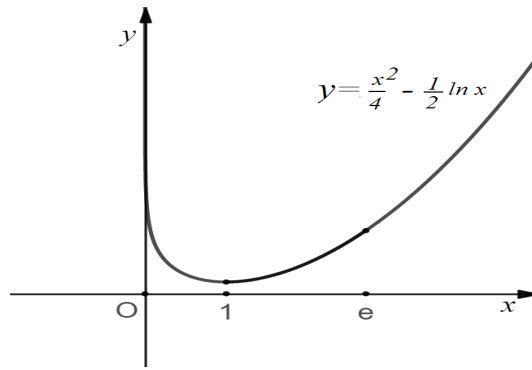


Slika 7: Telo (elipsoid) određeno rotacijom elipse oko  $x$ -ose.

### 0.2.2 Dužina luka krive

1. Izračunati dužinu luka krive  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$  za  $1 \leq x \leq e$ .

**Rešenje:** Kako je  $y'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{2x}$  tada traženu dužinu luka



Slika 8: Luk krive čiju dužinu određujemo u prvom zadatku.

krive računamo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^e \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2} \, dx \\
 &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)^2} \, dx = \int_1^e \frac{x^2 + 1}{2x} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left( \int_1^e x \, dx + \int_1^e \frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x^2}{2} \Big|_1^e + \ln x \Big|_1^e \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \underbrace{\ln e}_1 - \underbrace{\ln 1}_0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

2. Izračunati dužinu prvog luka cikloide  $x(t) = a(t - \sin t)$ ,  $y(t) = a(1 - \cos t)$

(to jest za  $t$  od 0 do  $2\pi$ ).

**Rešenje:** Cikloidu možemo da vidimo na Slici 2). Kako je posmatrana cikloida zadata u parametarskom obliku, potrebno je prethodno izračunati ogovarajuće izvode njenih parametarskih funkcija  $x(t)$  i  $y(t)$ :

$$\dot{x}(t) = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t),$$

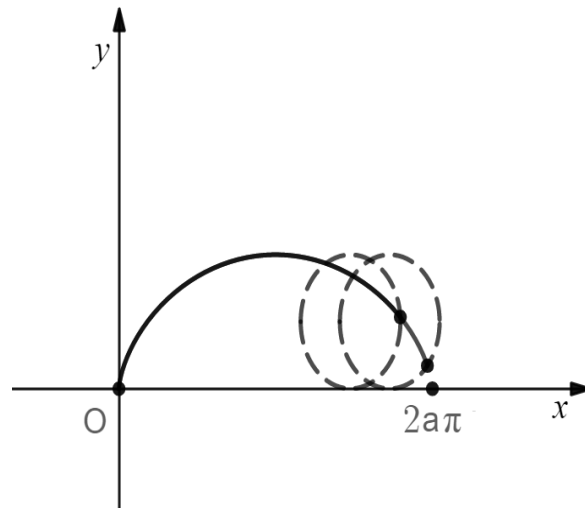
$$\dot{y}(t) = (a(1 - \cos t))' = a \sin t,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= (a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2 \\ &= a^2 (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t \\ &= a^2 \left( 1 - 2 \cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1 \right) \\ &= a^2 (2 - 2 \cos t) = 2a^2 (1 - \cos t) \\ &= 2a^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2} = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}, \end{aligned} \tag{1}$$

gde smo u (1) koristili relaciju  $\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$ . Sada dužinu prvog luka cikloide računamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &\left[ \begin{array}{ll} \text{smena : } u = \frac{t}{2} & \text{granice : } t = 0 \rightarrow u = 0 \\ & t = 2\pi \rightarrow u = \pi \\ du = \frac{1}{2} dt & \\ 2du = dt & \end{array} \right] \\ &= 2a \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin u du = 4a \cdot (-\cos u) \Big|_0^{\pi} = -4a \cdot \cos u \Big|_0^{\pi} \\ &= -4a \cdot (\cos \pi - \cos 0) = -4a \cdot (-1 - 1) = -4a \cdot (-2) = 8a. \end{aligned}$$



Slika 9: (a) Položaj fiksirane tačke kružnice poluprečnika  $a > 0$ , u trenutku  $t \in [0, 2\pi]$  tokom njenog kotrljanja, bez klizanja, duž pozitivnog dela  $x$ -ose.

Beleške

Beleške