



Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka



PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Primena određenog integrala - izračunavanje površine omotača obrtnog tela,
težište ravne figure

Radna nedelja br. 6

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

0.0.1 Izračunavanje površine omotača obrtnog tela

Neka su funkcije $f(x)$ i $f'(x)$ neprekidne na intervalu $[a, b]$. Pretpostavimo da luk krive $y = f(x)$ od tačke $A(a, f(a))$ do tačke $B(b, f(b))$ obrće oko x -ose, formirajući obrtno telo. Podelimo luk krive $y = f(x)$ između tačaka A i B tačkama

$$M_0 = A, M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B,$$

a koordinate tačaka M_i obeležimo sa $(x_i, f(x_i))$ za $i = 0, 1, \dots, n$. Obeležimo sa ΔP_i površinu omotača prave zarubljene kupe koja nastaje obrtanjem duži $\overline{M_{i-1}M_i}$ oko x -ose. Ovu površinu možemo zapisati koristeći formulu za omotač zarubljene kupe, tj.

$$\Delta P_i = \pi \Delta l_i (f(x_{i-1}) + f(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gde je Δl_i dužina bočne ivice, a $f(x_{i-1}) = r$ i $f(x_i) = R$ su poluprečnici osnova prave zarubljene kupe, videti sliku 1. Tada je Δl_i dužina duži $\overline{M_{i-1}M_i}$. U prethodnom odeljku ??, koji se bavi dužinom luka krive, smo videli da koristeći Lagranžovu teoremu, Δl_i možemo izraziti u obliku

$$\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

gde su $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ i $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Dakle, sada sledi da je

$$\Delta P_i = \pi \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

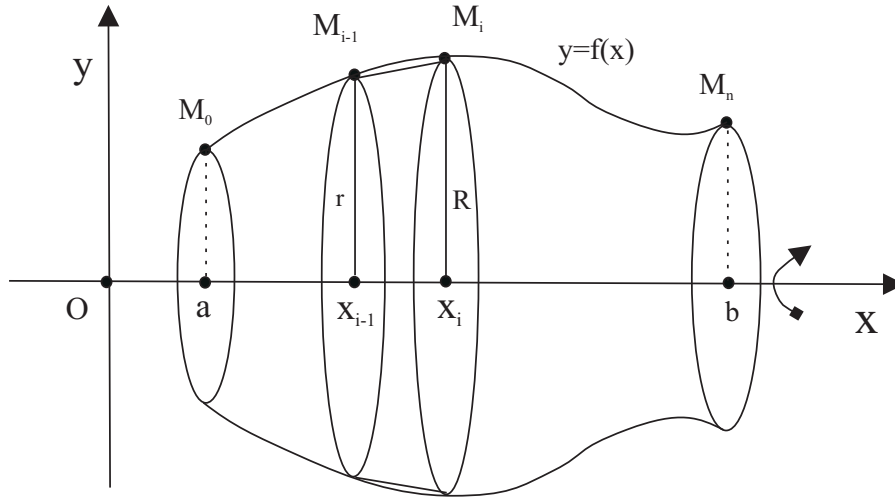
Funkcija $f(x)$ je neprekidna funkcija na zatvorenom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, stoga uzima sve brojne vrednosti između minimuma i maksimuma na tom intervalu, pa možemo pisati

$$f(x_{i-1}) + f(x_i) = 2 \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = 2f(\bar{\xi}_i),$$

za neko $\bar{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i]$. To nam omogućava da sada pišemo

$$\Delta P_i = 2\pi f(\bar{\xi}_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Posmatrajmo sada granični slučaj kada $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Tada, na osnovu neprekidnosti funkcije $f(x)$, u poslednjem izrazu $\bar{\xi}_i$ možemo zameniti sa ξ_i , jer dobijena nova vrednost $2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$ teži ka $2\pi f(\bar{\xi}_i) \sqrt{1 + f'^2(\bar{\xi}_i)} \Delta x_i$.



Slika 1: Površina omotača obrtnog tela.

Sada ukupnu površinu omotača obrtnog tela možemo zapisati kao sumu svih ΔP_i , odnosno

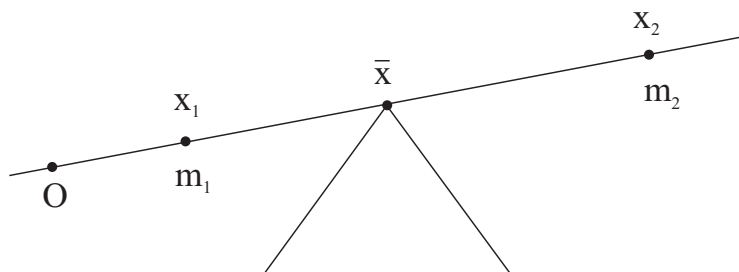
$$P = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta P_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Primitimo da poslednju sumu možemo tretirati i kao integralnu sumu neprekidne funkcije $f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}$, pa granična vrednost postoji i možemo pisati

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Pretpostavimo da je posmatrana kriva $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$ zadata u parametarskom obliku: $x = x(t)$ i $y = y(t)$, gde je $t_0 \leq t \leq t_1$. Tada se tačke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ dobijaju za vrednosti parametara $t = t_0$ i $t = t_1$, respektivno. Pretpostavimo da su funkcije $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ neprekidne na posmatranom intervalu. Formulu za površinu omotača obrtnog tela za parametarsku krivu možemo dobiti uvođenjem smene $x = x(t)$, odnosno

$$P = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(x(t)) \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2(t)}{\dot{x}^2(t)}} \dot{x}(t) dt = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Slika 2: Poluga sa masama m_1 i m_2 .

0.0.2 Težište ravne figure

Za početak posmatrajmo polugu sa masama m_1 i m_2 , kao što je prikazano na slici 2. Mase su smeštene na položajima x_1 i x_2 , u odnosu na koordinatni početak O , i poluga je poduprta u tački \bar{x} . Arhimedov zakon poluge tvrdi da je poluga u ravnotežnom položaju, ako je zadovoljena sledeća jednačina

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x}),$$

odnosno

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2},$$

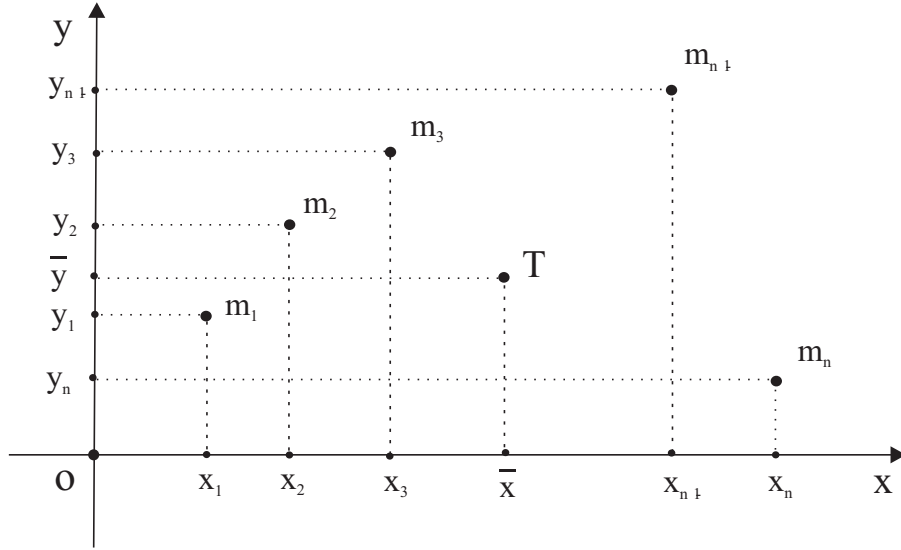
gde veličinu m_ix_i , za $i \in \{1, 2\}$, nazivamo **moment mase** m_i . Uopštavajući prethodni rezultat, posmatrajmo sistem sa masama m_1, m_2, \dots, m_n , koje se nalaze u tačkama x_1, x_2, \dots, x_n . Tada sistem ima ravnotežu u tački

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_ix_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M}{m},$$

gde su M moment sistema, a m ukupna masa sistema.

Sada smo u mogućnosti da posmatramo sistem od n diskretnih čestica sa različitim masama smeštenih u istoj ravni. Neka su (x_i, y_i) koordinate mase m_i za $i = 1, 2, \dots, n$, videti sliku 3. Tada je težište ovog sistema tačka $T(\bar{x}, \bar{y})$ sa koordinatama

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ i } \bar{y} = \frac{M_x}{m}, \quad (1)$$

Slika 3: Težište sistema od n čestica u ravni.

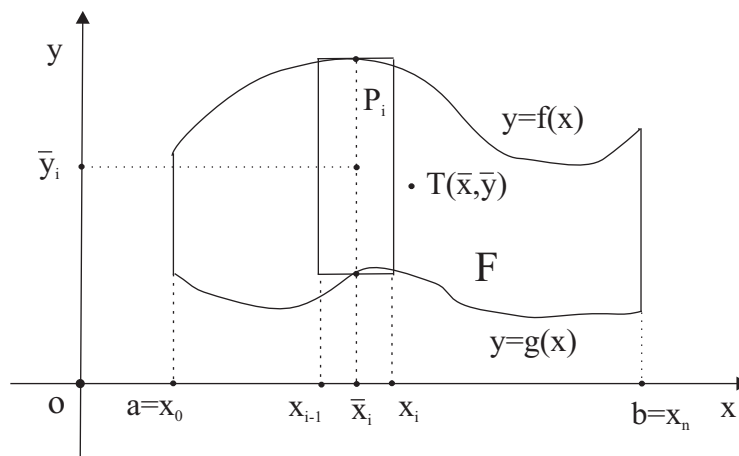
gde su $M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$ moment sistema oko y -ose, $M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$ moment sistema oko x -ose, a $m = \sum_{i=1}^n m_i$ je ukupna masa sistema.

Pređimo sada na određivanje težišta ravne figure ili ploče proizvoljnog oblika. Neka je ravna figura uniformne površinske gustine ρ određena pravama $x = a$, $x = b$ i graficima neprekidnih funkcija $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gde je $g(x) \leq f(x)$ za $x \in [a, b]$, videti sliku 4. Podelimo interval $[a, b]$ na n delova

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Obeležimo sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dužinu podintervala $[x_{i-1}, x_i]$, a sa \bar{x}_i njegovu sredinu, tj. $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Sa P_i ćemo obeležiti pravougaonik sa dužinom stranica Δx_i i $f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)$, i sa težištem u tački $T_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, gde je $\bar{y}_i = \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2}$, videti sliku 4. Masu pravougaonika P_i možemo prikazati kao proizvod gustine i površine, tj. $m(P_i) = \rho(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x_i$. Za koordinate težišta P_i , na osnovu formula (1), možemo pisati

$$\bar{x}_i = \frac{M_y(P_i)}{m(P_i)} \quad \text{i} \quad \bar{y}_i = \frac{M_x(P_i)}{m(P_i)},$$

Slika 4: Težište ravne figure F .

gde su $M_y(P_i)$ i $M_x(P_i)$ momenti sistema tačaka pravougaonika P_i oko y i x -ose, respektivno. Iz poslednje dve formule lako dobijamo da je

$$M_y(P_i) = \rho(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x_i \bar{x}_i \quad i$$

$$M_x(P_i) = \rho(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x_i \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2}.$$

Konačno, momente posmatrane ravne figure, $M_y(F)$ i $M_x(F)$, možemo dobiti sabiranjem svih $M_y(P_i)$, odnosno $M_x(P_i)$, uz pretpostavku da $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. U formalnom zapisu to izgleda ovako

$$\begin{aligned} M_x(F) &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_x(P_i) \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \rho \sum_{i=1}^n \frac{f^2(\bar{x}_i) - g^2(\bar{x}_i)}{2} \Delta x_i \end{aligned}$$

gde poslednji zbir možemo interpretirati kao integralnu sumu od neprekidne funkcije, što nam daje za pravo da pišemo

$$M_x(F) = \frac{\rho}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$

Rezonujući na sličan način, možemo doći do formule

$$M_y(F) = \rho \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx.$$

Ukupna masa ravne figure, $m(F)$ je zbir masa svih pravougaonika $m(P_i)$ u graničnom slučaju kada je $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, tj.

$$m(F) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m(P_i) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)) \Delta x_i.$$

Primetimo da je poslednji zbir integralna suma od neprekidne funkcije, pa dobijamo da je

$$m(F) = \rho \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Sada smo u prilici da odredimo težište ravne figure $T(\bar{x}, \bar{y})$, pri čemu su

$$\bar{x} = \frac{M_y(F)}{m(F)} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} \quad \text{i}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x(F)}{m(F)} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}.$$

0.1 PRIMERI

1. Izračunati površinu omotača tela koje nastaje rotacijom figure ograničene sledećim krivama:

(a) krivom $y = x^3$ i pravama $x = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$ oko x -ose;

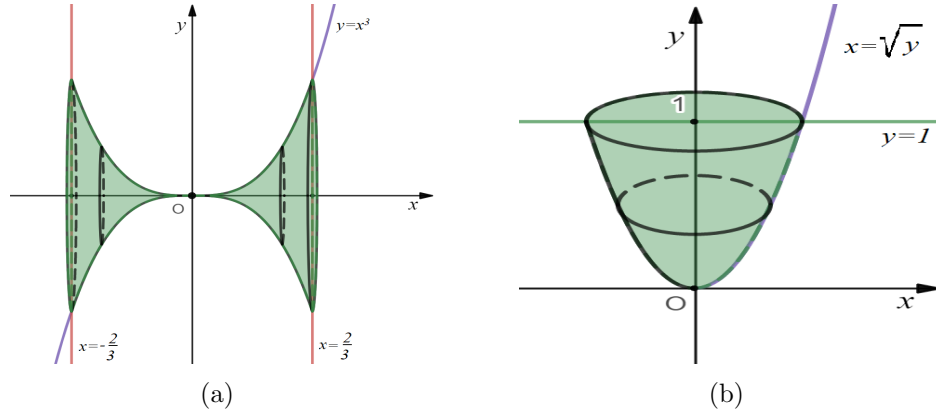
(b) krivom $x = \sqrt{y}$ i pravom $y = 1$ oko y -ose.

Rešenje: (a) Prisetimo prvo da je telo koje se dobija rotacijom oko x -ose dela krive $y = x^3$ za $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ osno-simetrično u odnosu na y -osu (Slika 5(a)). Tada tražena površina omotača tela $P = 2 \cdot P_1$, gde P_1 predstavlja površinu omotača tela određenog rotacijom dela posmatranog luka krive

$y = x^3$ koji se nalazi u prvom kvadrantu. Otuda, imamo:

$$\begin{aligned}
 P &= 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\frac{2}{3}} y(x) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \\
 &= 4\pi \cdot \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 4\pi \cdot \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx \\
 &\left[\begin{array}{ll} \text{smena : } t = 1 + 9x^4 & \text{granice : } x = 0 \rightarrow t = 1 \\ dt = 36x^3 dx & x = \frac{2}{3} \rightarrow t = \frac{25}{9} \\ x^3 dx = \frac{1}{36} dt & \end{array} \right] \\
 &= 4\pi \cdot \frac{1}{36} \cdot \int_1^{\frac{25}{9}} \underbrace{\sqrt{t}}_{t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^{\frac{25}{9}} = \frac{2\pi}{27} \cdot \left[\left(\frac{25}{9} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \\
 &= \frac{2\pi}{27} \cdot \left[\left(\sqrt{\frac{25}{9}} \right)^3 - 1 \right] = \frac{2\pi}{27} \cdot \left[\left(\frac{5}{3} \right)^3 - 1 \right] \\
 &= \frac{2\pi}{27} \cdot \left(\frac{125}{27} - 1 \right) = \frac{2\pi}{27} \cdot \frac{98}{27} = \frac{196\pi}{729}.
 \end{aligned}$$

(b) Kako je posmatrano telo određeno rotacijom osenčene figure na Slici

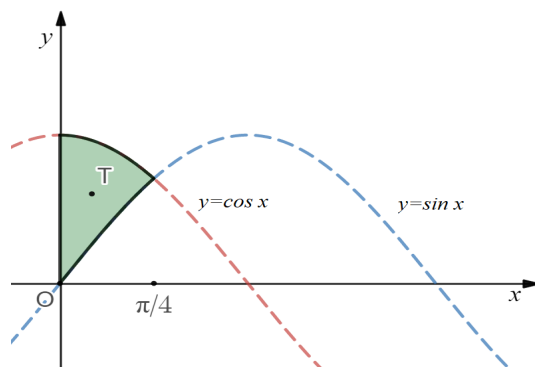


Slika 5: (a) Telo koje je određeno rotacijom figure iz prvog zadatka pod (a) oko x -ose; (b) telo određeno rotacijom figure iz prvog zadatka pod (b) oko y -ose.

5(b) oko y -ose, tada za njegovu površinu omotača imamo sledeće:

$$\begin{aligned}
 P &= 2\pi \cdot \int_0^1 x(y) \cdot \sqrt{1 + x'(y)^2} dy = 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2} dy \\
 &= 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy = 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{y + \frac{1}{4}} dy \\
 &\left[\begin{array}{l} \text{smena : } t = y + \frac{1}{4} \quad \text{granice : } y = 0 \rightarrow t = \frac{1}{4} \\ dt = dy \quad \quad \quad y = 1 \rightarrow t = \frac{5}{4} \end{array} \right] \\
 &= 2\pi \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} \underbrace{\sqrt{t}}_{t^{\frac{1}{2}}} dt = 2\pi \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} = \frac{4\pi}{3} \cdot \left[\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \\
 &= \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{5\sqrt{5} - 1}{8} \right) = \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1).
 \end{aligned}$$

2. Odrediti težište ravne ploče uniformne gustine ograničene graficima krivih $y = \sin x$ i $y = \cos x$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{4}]$. **Rešenje:** Koordinate težišta



Slika 6: Ravna ploča čije težiste određujemo.

$T(\bar{x}, \bar{y})$ ravne ploče uniformne gustine koja se proteže od grafika funkcije $y = f(x)$ do grafika funkcije $y = g(x)$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{4}]$ (Slika 6)

određujemo na sledeći način:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot (g(x) - f(x)) \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x)) \, dx} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot (\cos x - \sin x) \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \, dx}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{parcijalna integracija :} \\ u = x \qquad \qquad \qquad dv = (\cos x - \sin x) \, dx \\ du = dx \qquad \qquad \qquad v = \sin x + \cos x \end{array} \right]$$

$$= \frac{x \cdot (\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \, dx}$$

$$= \frac{x \cdot (\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}}{(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) - \left[\underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \left(\underbrace{\sin 0}_0 - \underbrace{\cos 0}_1 \right) \right]}{\underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \left(\underbrace{\sin 0}_0 + \underbrace{\cos 0}_1 \right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}\pi - 4}{4(\sqrt{2} - 1)},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) + f(x)) \cdot (g(x) - f(x)) \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x)) \, dx}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x) \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \, dx}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{smena : } t = \cos x + \sin x & \text{granice : } x = 0 \rightarrow t = 1 \\ dt = (-\sin x + \cos x) \, dx & x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \sqrt{2} \\ dt = (\cos x - \sin x) \, dx & \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_1^{\sqrt{2}} t \, dt}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left. \frac{t^2}{2} \right|_1^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left[\overbrace{(\sqrt{2})^2}^2 - 1 \right]}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)},$$

odakle imamo da je težište posmatrane figure tačka $T \left(\frac{\sqrt{2}\pi - 4}{4(\sqrt{2} - 1)}, \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)} \right)$.

Beleške