Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Funkcije više promenljivih

Radna nedelja br. 7

Prof. dr Tibor Lukić

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

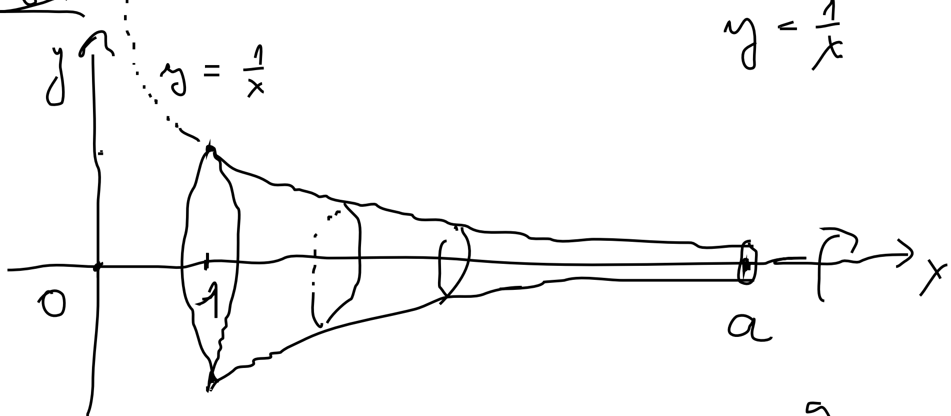
Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \quad F'(x) = f(x), \quad x \in [a,b]$$

PRIMER (GAVRILOVA / TORIČELIJEVA TRUBA)

IZRAČUNATI ZAPREMINU I POV. OMOTAČA ROTACIONOG TELA KOJE NASTAJE ROTACIJOM KRIVE $y = \frac{1}{x}$ ~~ZA~~ $x \geq 1$.

REŠ.



$y = \frac{1}{x}$

$x \geq 1$

$x \in [1, a]$

$a > 1, \ a \in \mathbb{R}$

$a \to +\infty$

$$V = \pi \int_1^a y^2(x)\,dx = \pi \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \int_1^a x^{-2}\,dx = \pi \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^a = -\pi \left.\frac{1}{x}\right|_1^a =$$

$$= -\pi\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

$$\underset{\sim}{P} = 2\pi \int_1^a y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = 2\pi\int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx > 2\pi\int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+0}\,dx = 2\pi\int_1^a \frac{dx}{x} =$$

$\frac{1}{x^4} > 0$

$x \in [1, a]$

$$= 2\pi \ln x \Big|_1^a = 2\pi(\ln a - \cancel{\ln 1})$$

$$= 2\pi \ln a$$

Glava 1

$V = \pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ $\quad a \to +\infty \quad$ $\boxed{V \to \pi}$

$P > 2\pi \ln a$ $\quad$ $P > +\infty$ $\quad$ $\boxed{P \to +\infty}$

Realne funkcije više promenljivih

$\lim_{a\to+\infty} \ln a = +\infty$

Mnoge pojave u realnom svetu često zavise od uticaja više faktora. U matematičkom smislu, merne vrednosti ovakvih pojava se mogu opisati pomoću funkcija više promenljivih, gde svaki faktor odgovara jednom argumentu ili promeljivoj funkcije. Zbog jednostavnosti, u nastavku ćemo se baviti funkcijama koje zavise samo od dve promenljive.

$y = f(x)$

$x \in D$

Neka svakom uređenom paru brojeva $(x, y) \in D$, gde je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ pridružena jedna (i samo jedna!) vrednost $z \in \mathbb{R}$. U tom slučaju dobijamo **realnu funkciju dve realne promenljive**, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Skup D zovemo **domen** funkcije, x i y su argumenti, tj. nezavisno promenljive, a z je slika, tj, zavisno promenljiva. Skup slika nazivamo **kodomen**. Ako se ovo pridruživanje može prikazati u obliku

$f(x, y)$

$f(x, y, z)$

$$z = f(x, y),$$

$z = x^2 + y^2$ PARABOLOID

$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

gde je $f(x, y)$ funkcija od dve promenljive, kažemo da je funkcija zadata u **eksplicitnom obliku**. Međutim, nije uvek moguće izraziti z preko promenljivih x i y. U tom slučaju, preslikavanje najčešće prikazujemo u **implicitnom obliku**

$z^2 = -x^2 - y^2$

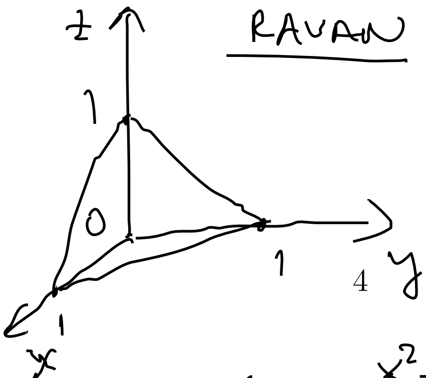
$$F(x, y, z) = 0.$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ SFERA

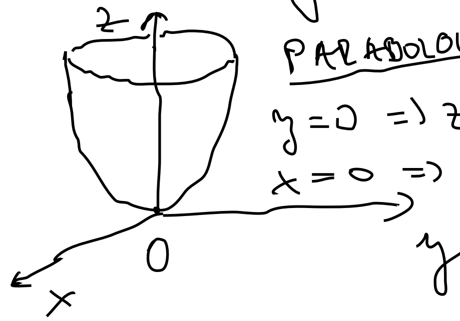
$z = \pm\sqrt{-x^2 - y^2}$

Primetimo da implicitni oblik zadavanja preslikavanja omogućava i **višeznačno preslikavanje**, tj. da nekim uređenim parovima (x, y) odgovara više od jedne vrednosti z. Očigledan primer za ovo preslikavanje je jednačina centralne sfere poluprečnika jedan: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

$x+y+z=1 \iff z=1-x-y$



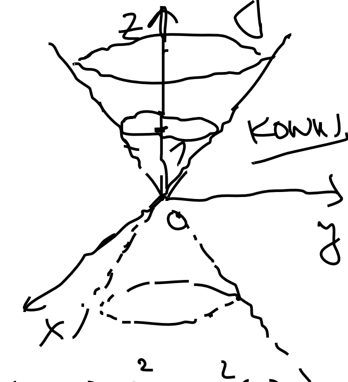
$z=x^2+y^2$



$y=0 \implies z=x^2$

$x=0 \implies z=y^2$

$z^2=x^2+y^2$

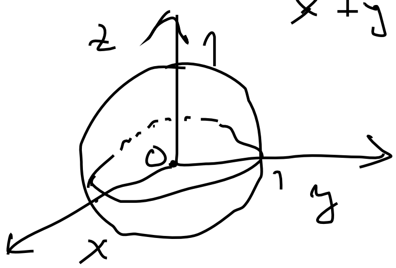


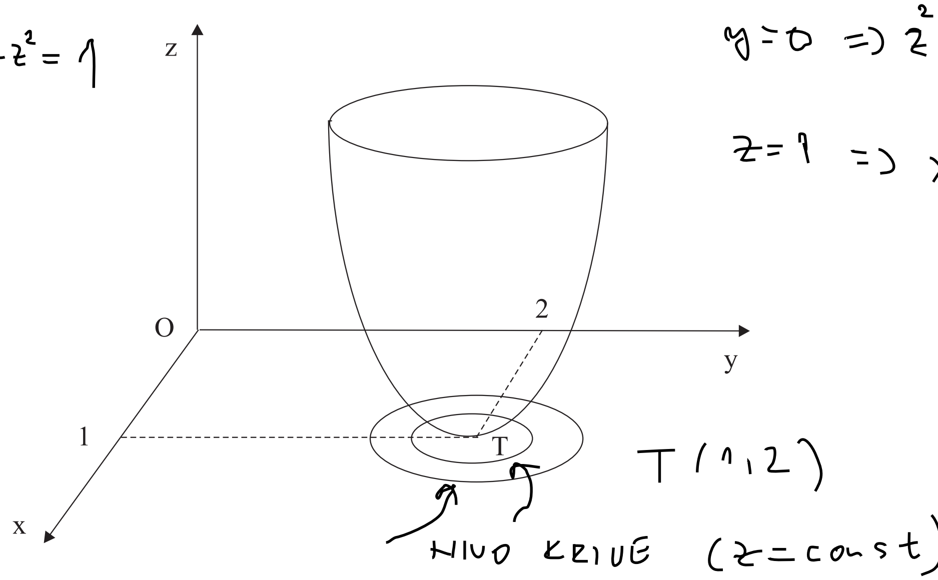
$y=0 \implies z^2=x^2 \iff$

$z=\pm x$

$z=1 \implies x^2+y^2=1$

$x^2+y^2+z^2=1$





Slika 1.1: Paraboloid $z=(x-1)^2+(y-2)^2$ sa nivo krivama (kružnicama) u xy-ravni.

$D \subseteq \mathbb{R}^2$

U prostornom pravougaonom koordinatnom sistemu, svakom uređenom paru $(x,y)\in D$ ogdovara jedna tačka u xy-ravni. Funkcija $z=f(x,y)$ pridružuje z koordinatu tački domena i tako dobijamo tačku u prostoru $M(x,y,z)$. Skup svih tačaka, dobijenih na ovakav način, formira **prostorni grafik funkcije**, koji ćemo često nazivati **površ funkcije** u prostoru ili samo kratko **površ**. Ovu površ možemo predstaviti i kao geometrijsko mesto tačaka definisanih skupom

$$\{(x,y,z)|\, F(x,y,z)=0,\ (x,y)\in D\}.$$

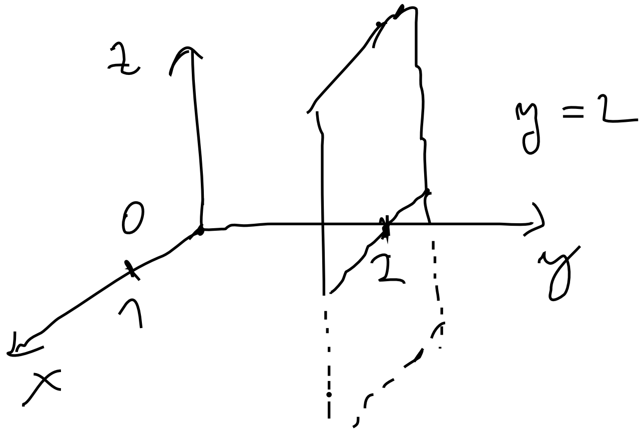
Primer 1 *Predstaviti u prostornom koordinatnom sistemu površ koja je određena funkcijom*

$$z=(x-1)^2+(y-2)^2.$$

Kao prvi korak, odredimo preseke tražene površi sa ravnima paralelnim xy-ravni, tj. sa ravnima čija je jednačina $z=c$, gde je konstanta $c\in\mathbb{R}$. Na taj način ćemo dobiti **nivo krive** površi:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=c,$$

koje za $c\geq 0$ predstavljalju kružnice u xy-ravni sa centrom u $T(1,2)$. Primetimo da za $c<0$ jednačina nema rešenja. Presek sa ravni $x=1$ je parabola $z=(y-2)^2$, a presek sa ravni $y=2$ je parabola $z=(x-1)^2$.



Na osnovu dobijenih nivo krivih i preseka sa ravnima $x = 1$ i $y = 2$ zaključujemo da se data površ može dobiti rotacijom kvadratne parabole oko prave koja prolazi kroz tačku T i paralelna je sa z-osom. Zadatu površ nazivamo paraboloid sa temenom u tački $T(1, 2, 0)$, videti sliku 1.1.

Parabolid je površ iz klase **površi drugog reda**. Površi drugog reda su analogni objekti krivama drugog reda u ravni, i u njih, između ostalih, ubrajamo konus, cilindar, sferu i elipsoid.

$z = f(x, y, z)$

Razume se, funkcije mogu da zavise i više od dve premenljive, pa tako razlikujemo funkcije tri, četiri ili $n \in \mathbb{N}$ realnih promenljivih $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gde je $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Međutim, prostorno-geometrijsko predstavljanje ovih funkcija nije moguće.

1.1 Parcijalni izvodi i totalni diferencijal

$y = f(x)$

$x = x_0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Posmatrajmo funkciju dve realne promenljive $z = f(x, y)$. Ako fiksiramo jednu nezavisnu promenljivu (proglasimo je za konstantu) dobićemo funkciju od jedne promenljive. U ovakvom slučaju, možemo tražiti izvod po toj, "slobodnoj", promenljivoj. Ovaj izvod ćemo nazivati parcijalni izvod funkcije. Sledeći ovu deju, dolazimo do definicije parcijalnog izvoda.

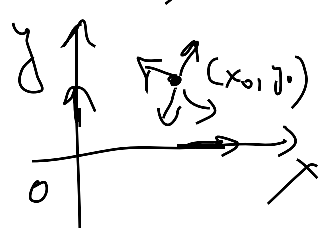
Parcijalni izvod funkcije $z = f(x, y)$ u tački (x_0, y_0) po promenljivoj x obeležavamo sa $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ i definišemo sa

$f(x, y)$

(x_0, y_0) 2D

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x}.$$

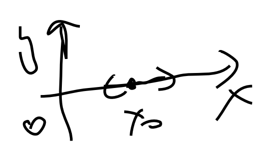
Kažemo da $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ postoji, ako postoji granična vrednost iz gornje definicije. Na sličan način definišemo parcijalni izvod po promenljivoj y (ili skraćeno po y-u) u tački (x_0, y_0)



$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y}.$$

1D

Umesto oznake $\frac{\partial z}{\partial x}$ možemo koristiti i zapise $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x ili f'_x.



Definiciju parcijalnog izvoda na analogan način možemo proširiti na funkciju n realnih promenljivih $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gde je $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Parcijalni izvod funkcije z po promenljivoj x_i u tački $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ se definiše kao

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M_0) = \lim_{\triangle h \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + \triangle h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{\triangle h}.$$

PRIMER. IZRAČUNATI SLEDEĆE PARC. IZVODE, AKO JE
$z = xy - x^2$

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x$; b) $\frac{\partial z}{\partial y} = x$; c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(y - 2x) = -2$

d) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$

Ako gore dobijene parcijalne izvode prvog reda ponovo diferenciramo, dobićemo parcijalne izvode drugog reda. **Parcijalni izvodi drugog reda** po x i y se mogu zapisati na sledeći način

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Uopšte, parcijalni izvodi n-tog reda po x i y se mogu definisati formulama

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\right) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\right).$$

Parcijalni izvodi višeg reda mogu biti i **mešoviti parcijalni izvodi**, na primer

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{i}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right).$$

Uz pretpostavke da je funkcija $z = f(x, y)$ neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda, može se pokazati da su mešoviti izvodi jednaki, tj.

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.}$$

1D $y = f(x)$

$dy = f'(x)\,dx$

DIFERENCIJAL FUNKCIJE

U nastavku rada, mi ćemo se baviti samo funkcijama koje zadovoljavaju ove uslove.

Po ugledu na diferencijal funkcije jedne promenljive, posmatrajmo izraz

2D

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

$dz(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A)dy$

koji se naziva **totalni diferencijal prvog reda** za funkciju $z = f(x, y)$. Totalni diferencijal, slično parcijalnim izvodima, je lokalni operator, što znači da zavisi od posmatrane tačke $dz(x_0, y_0)$. Međutim, često pišemo samo dz i tada mislimo na proizvoljnu tačku.

Totalni priraštaj funkcije $\triangle z$ u tački (x_0, y_0) za priraštaje argumenata $\triangle x$ i $\triangle y$ se definiše

$$\triangle z = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0).$$

PRIMER AKO JE $z = f(x,y) = x^2 y - 2xy^3$, IZRAČUNATI

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 2y^3$ b) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 6xy^2$ —

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 6xy^2\right) = 2x - 6y^2$ -

d) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy - 2y^3\right) = 2x - 6y^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Priraštaj može da se prikaže u obliku zbira dveju razlika

$$\triangle z = (f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0 + \triangle y)) + (f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)),$$

gde obe razlike mogu da se aproksimiraju primenom parcijalnih izvoda. Zaista, ako prvu razliku proširimo sa $\triangle x$, dobijamo

$$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0 + \triangle y) =$$

$$= \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0 + \triangle y)}{\triangle x}\triangle x \approx \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0 + \triangle y)\triangle x,$$

i na sličan način, za drugu razliku dobijamo

$$f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle y.$$

Sada za totalni priraštaj $\triangle z$ možemo pisati

$$\triangle z \approx \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0 + \triangle y)\triangle x + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle y,$$

što u graničnom slučaju, kada $\triangle x \to 0$ i $\triangle y \to 0$, daje sledeću relaciju

$$\triangle z = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle x + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle y = dz(x_0, y_0),$$

gde je uzeto da je $dx = \triangle x$ i $dy = \triangle y$. Drugim rečima, pokazali smo da vrednost totalnog diferencijala u tački jednaka je približnoj vrednosti totalnog priraštaja funkcije u toj istoj tački.

Izraz

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

nazivamo **totalni diferencijal drugog reda** funkcije $z = f(x, y)$.

$d(dz) =$

$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$

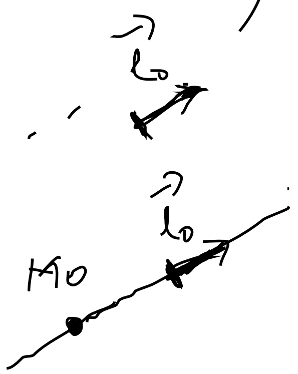
$= - -$

1.2 Izvod u pravcu i gradijent

Izvod funkcije možemo da shvatimo kao meru promene funkcije u tački pri promeni argumenta. Domen funkcije jedne promenljive je deo realne ose, pa argument može da se kreće samo duž jednog pravca i izvod ne može da zavisi od izbora pravca. Međutim, u slučaju funkcije dve promenljive $z = f(x, y)$, PRIMER $z = x^2y^3 - 3xy$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 - 3y$ A(1,2) $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = 2\cdot 1\cdot 2^3 - 3\cdot 2 = 16 - 6 = 10$

$\vec{l_0} = (l_1, l_2)$ B(1,0) $\frac{\partial z}{\partial x}(B) = 2\cdot 1\cdot 0 - 3\cdot 0 = 0$



domen je deo xy-ravni, pa sledi da iz jedne posmatrane tačke argumenta može da se pomeri u različitim pravcima i za očekivati je da će i mera promene funkcije, tj. izvod, zavisiti od izbora pravca.

Posmatrajmo tačku $M(x_0, y_0)$ i jedinični vektor $\vec{l_0} = (l_1, l_2)$. Prava u xy-ravni koja prolazi kroz tačku M i ima paravac određen vektorom $\vec{l}$ ima sledeću parametrasku jednačinu

$\|\vec{l_0}\| = 1$ ⇐ JEDINIČNI VEKTOR

$$p: \quad x = x_0 + tl_1, \; y = y_0 + tl_2,$$

p $M_0 \in p$ $p \parallel \vec{l_0}$

gde je t realni parametar. U tačkama te prave, funkcija $z = f(x_0 + tl_1, y_0 + tl_2)$ postaje funkcija od jedne promenljive $z(t)$. Sada možemo da posmatramo izvod funkcije $z(t)$ po t-u u tački $t = 0$. Koristeći pravilo za izvod složene funkcije, dolazimo do pravila za računanje izvoda u pravcu vektora $\vec{l_0}$

$z = z(t)$

$z'(t)\big|_{t=0}$

$$p: \begin{cases} x = x_0 + t\cdot l_1 \\ y = y_0 + t\cdot l_2 \end{cases}$$

$$\frac{df(x_0 + tl_1, y_0 + tl_2)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} l_1 + \frac{\partial f}{\partial y} l_2.$$

Dobijena formula omogućava da definišemo izvod funkcije $z = f(x, y)$ u pravcu jediničnog vektora $\vec{l_0} = (l_1, l_2)$ u tački (x_0, y_0) na sledeći način

$(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$

$M_0 = (x_0, y_0)$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) l_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) l_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (l_1, l_2).}$$

SKALARNI PROIZVOD VEKTORA

Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ nazivamo **gradijent funkcije** $z = f(x, y)$ i obeležavamo sa $grad\, z$ ili ∇f. Ako iskoristimo oznaku gradijenta, formulu za izvod u pravcu vektora $\vec{l_0}$ možemo da pišemo u obliku

grad f

$\nabla f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (l_1, l_2) = \nabla f \cdot \vec{l_0}.$$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Ako posmatramo funkciju koja zavisi od tri promenljive $u = f(x, y, z)$, formula za izračunavanje izvoda u pravcu jediničnog vektora $\vec{l_0} = (l_1, l_2, l_3)$ se na prirodan način transformiše na sledeći oblik

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (l_1, l_2, l_3) = \nabla f \cdot \vec{l_0}.$$

Primenjujući definiciju skalarnog proizvoda dva vektora, možemo analizirati formulu za izvod u pravcu

PRIMER Izračunati gradijent funkcije $f(x,y) = 2xy - 3y^3$ u tački $M_0 = (1,-2)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 9y^2$. $\nabla f = (2y, 2x - 9y^2)$

$\nabla f(M_0) = \nabla f \Big|_{M_0} = (2\cdot(-2), 2\cdot 1 - 9\cdot(-2)^2) = (-4, -34)$

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \quad \partial}$ $\frac{df}{dx}$ $d \leadsto \partial$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}} = \nabla f \cdot \vec{l_0} = |\nabla f|\,|\vec{l_0}| \cos\varphi = |\nabla f|\ \cos\varphi,$$

gde je $\varphi \in [0^0, 180^0]$ ugao između vektora ∇f i $\vec{l_0}$. Funkcija $\cos\varphi$ ima najmanju vrednost (-1) za $\varphi = 180^0$, odnosno kada vektor $\vec{l_0}$ biramo tako da ima pravac gradijenta, ali suprotan smer, tj. $\vec{l_0} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Lako je videti da je to ujedno i pravac za koji $\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}$ ima minimalnu vrednost, tj. funkcija $z = f(x,y)$ ima najveći pad. Na sličan način možemo zaključiti da za pravac $\vec{l_0} = +\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ izvod $\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}$ ima maksimalnu vrednost, tj. funkcija ima $z = f(x,y)$ najveći rast.

$-1 \le \cos\varphi \le 1$

$\vec{l_0} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ $\varphi = 180^0$ $\cos 180^0 = -1$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}} = |\nabla f|\cdot(-1)$ MIN

$\vec{l_0} = +\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ $\vec{l_0} \parallel \nabla f$ $\varphi = 0^0$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}} = |\nabla f|\cdot 1$ MAX

1.3 PRIMERI

M_0

1.3.1 Parcijalni izvodi. Diferencijal

1. Izračunati prvi i drugi totalni diferencijal sledećih funkcija

   a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ $\quad z = z(x,y)$

   Rešenje
   Nađimo prvo parcijalne izvode funkcije $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 6y) = 6x$

Napomena Kada određujemo izvod po x (analogno i za ostale nezavisne promenljive) funkcije više promenljivih, sve ostale nezavisne promenljive tretiramo kao konstante, te se postupak traženja parcijalnog izvoda svodi na traženje izvoda funkcije jedne realne promenljive.

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \Rightarrow$

Prvi totalni diferencijal je jednak

$$\Rightarrow dz = (3x^2 - 3y)dx + (3y^2 - 3x)dy.$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 3x) = 6y$

Parcijalni izvodi drugog reda su

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 3x) = -3$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Drugi totalni diferencijal je

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \\ &= 6x\ dx^2 - 6\ dxdy + 6y\ dy^2. \end{aligned}$$

1.3.2 Izvod u pravcu i gradijent

1. Data je funkcija $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - xy$

   a) Odrediti gradijent od f u tački $A(1,-1)$.

   b) Izračunati izvod u pravcu vektora $\vec{l} = (1,2)$ funkcije f u tački $B(1,0)$.

Rešenje
a) Nađimo parcijalne izvode funkcije f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - x$$

Dakle gradijent od f je

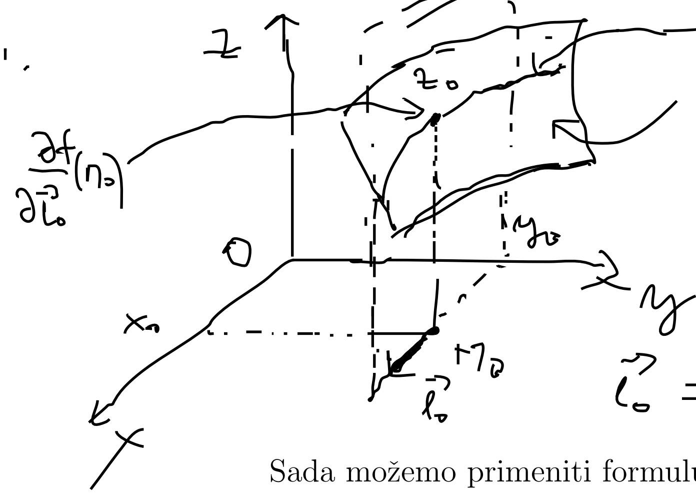
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x - y, 6y - x),$$

konkretno u tački $A(1,-1)$ je

$$\nabla f(-1,1) = (2\cdot 1 - (-1),\ 6\cdot(-1) - 1) = (3,-7).$$

b) Jedinični vektor koji odgovara vektoru $\vec{l}$ je

$$\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$



$z = f(x, y)$

$z_0 = f(x_0, y_0)$

$M_0 = (x_0, y_0)$

$z(t) =$

$= f(x_0 + t l_1, y_0 + t l_2)$

$\vec{l}_0 = \frac{-\nabla f}{|\nabla f|}$

Sada možemo primeniti formulu za izvod funkcije f u pravcu vektora $\vec{l_0}$ u tački $B(1,0)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(1,0) &= \nabla f(1,0) \cdot \vec{l_0} = (2 \cdot 1 - 0,\ 6 \cdot 0 - 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\
&= (2,-1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + (-1) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.
\end{aligned}
$$

Beleške

Beleške