Univerzitet u Novom Sadu

Fakultet tehničkih nauka

PREDMET: MATEMATIKA 2 (20.M106)
STUDIJSKI PROGRAM: Mašinstvo

BELEŠKE SA PREDAVANJA

Diferencijalne jednačine prvog reda
Jednačina koja razdvaja promenljive, Homogena jednačina

Radna nedelja br. 8

$y = f(x) \quad , \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}$

$df = f'(x)\,dx$

$\frac{df}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'$

Prof. dr Tibor Lukić

$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \quad F'(x) = f(x)$

$\int df = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$

$\int / \quad g(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int g(x)\,dx = \int 1 \cdot dx$

PRIMER $y' + x = 2$

$y = y(x) = ?$

$y = 2x - \frac{x^2}{2} + C$

$y' = 2 - x$

$\frac{dy}{dx} = 2 - x \quad / \cdot dx$

$dy = (2 - x)\,dx \quad / \int$

$\int dy = \int (2 - x)\,dx$

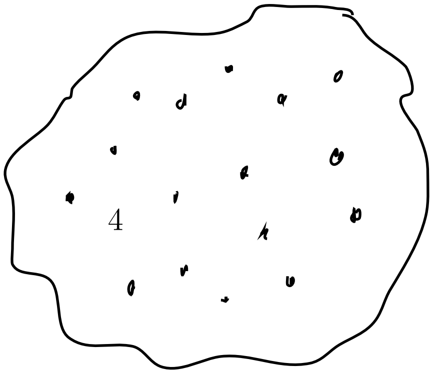
$y + C = 2x - \frac{x^2}{2}$

Sadržaj prezentacije se oslanja na sledeću publikaciju:

Tibor Lukić, Vladimir Ilić, Ivan Prokić, Jelena Đukić, *MATEMATIKA 2 - integralni račun i diferencijalne jednačine*, knjiga u pripremi, 2021.

Beleške

1 PRIMER (MALTUSOV ZAKON RASTA POPULACIJE)



$N(t)$ – BROJ JEDINKI POSMATRANE POPULACIJE U TRENUTKU t

$$N(t) = ?$$

"VELIČINA PROMENE POPULACIJE SRAZMERNA JE BROJU JEDINKI."

$N'(t)$ – MERA PROMENE BROJA JEDINKI

$$\boxed{N'(t) = k \cdot N(t)}$$

, GDE JE k – KONSTANTA (KARAKTERISTIKA POPULACIJE)

$$\boxed{N(t_0) = N_0}$$

← BROJ JEDINKI U TRENUTKU $t = t_0$

POČETNI USLOV

$$N' = kN$$

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int k\,dt$$

$$\ln N = k \cdot t + C$$

$$N = e^{k \cdot t + C} = e^{kt} \cdot \underbrace{e^{C}}_{=c}$$

$$N(t) = c \cdot e^{kt}$$

← OPŠTE REŠENJE

$$N(t_0) = N_0$$

$$\Downarrow$$

$$N_0 = c \cdot e^{k t_0}$$

$$c = \frac{N_0}{e^{k t_0}}$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{k(t - t_0)}$$

↑ PARTIKULARNO REŠENJE MALTUSOVOG PROBLEMA

Glava 1

Diferencijalne jednačine

1.1 Opšti pojmovi

Diferencijalne jednačine čine osnovu mnogih matematičkih modela za opisivanje različitih prirodnih pojava koje proučavaju prirodne nauke, ali takođe i problema u mnogim primenjenim naukama.

1.1.1 Klasifikacija i oblici diferencijalnih jednačina

Jednačina koja sadrži nepoznatu funkciju i njene izvode naziva se **diferencijalna jednačina**. Ako nepoznata funkcija zavisi od više promenljivih, onda se radi o **parcijalnoj diferencijalnoj jednačini**, na primer

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y,$$

gde je $z = z(x, y)$ nepoznata funkcija. U slučaju kada nepoznata funkcija zavisi samo od jedne promenljive govorimo o **običnoj diferencijalnoj jednačini**, na primer

$$y^{(3)} + 2xy'' + 3y = x^2,$$

gde je $y = y(x)$ nepoznata funkcija. **Red diferencijalne jednačine** se definiše kao red najvišeg izvoda koji se javlja u jednačini. Na primer,

$$(x^2 \ln x)y^{(5)} + 5y'' + y \cos x = y^2$$

predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu petog reda.

U daljem radu bavićemo se isključivo običnim defirencijalnim jednačinama.

1.2 Diferencijale jednačine prvog reda

Jednačina oblika

$y = y(x)$

$$F(x, y, y') = 0$$

se naziva **opšti oblik obične diferencijalne jednačine prvog reda**. Ako se ova jednačina može rešiti po y', onda dobijamo **normalni oblik difrencijalne jednačine prvog reda**

$$y' = f(x, y).$$

Svaka funkcija $y = \phi(x)$ koja je definisana i diferencijabilna u nekoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}$ i koja zadovljava jednačinu

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0,$$

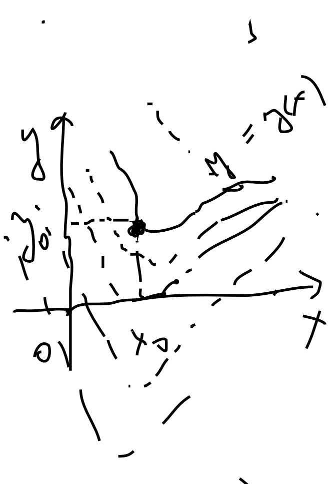
odnosno

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)),$$

za svako $x \in D$, naziva se **rešenje diferencijalne jednačine.**

Sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza, definiše dovoljne uslove za egzistenciju i jedinstvenost rešenja diferencijalne jednačine.

Teorema 1 *(Picard-ova teorema) Ako su diferencijalnoj jednačini* $y' = f(x, y)$ *funkcije* $f(x, y)$ *i* $f'_y(x, y)$ *definisane i neprekidne na zatvorenoj oblasti* $\Omega = \{(x, y) \,|\, |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$, *koja sadrži tačku* (x_0, y_0), *tada postoji jedinstveno rešenje* $y = y(x)$ *jednačine* $y' = f(x, y)$ *za koje važi* $y(x_0) = y_0$ *i koje je neprekidno diferencijabilno po* x *na intervalu* $|x - x_0| \leq h$ *za* $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, *gde je* M *konstanta koja ograničava funkciju* $f(x, y)$ *na posmatranoj oblasti* Ω.



Dodatni uslov $y(x_0) = y_0$ se naziva **početni uslov** za posmatranu diferencijalnu jednačinu $F(x, y, y') = 0$. Geometrijska interpretacija govori da rešenje $y = y(x)$ prolazi kroz tačku (x_0, y_0). Početni uslov zajedno sa diferencijalnom jednačinom se zove **početni problem.**

$\left[F(x, y, y') = 0 \wedge y(x_0) = y_0\right]$

Primer 1 *Odredimo ono rešenje diferencijalne jednačine* $y' = 3x^2$ *koje prolazi kroz tačku* $(1, 2)$ *(početni uslov).*

$(x_0, y_0) = (1, 2)$ $\quad x_0 = 1,\ y_0 = 2$ $\quad y(1) = 2$

Nije teško videti da je $y = x^3$ jedno rešenje date jednačine. Zaista, diferenciranjem ćemo dobiti polaznu jednačinu $y' = 3x^2$. Međutim, svaka nova funkcija oblika $y = x^3 + C$, gde je C proizvoljna konstanta, je takođe rešenje polazne

$y = \phi(x, C)$

$y' = 3x^2$, $y(x) = ?$

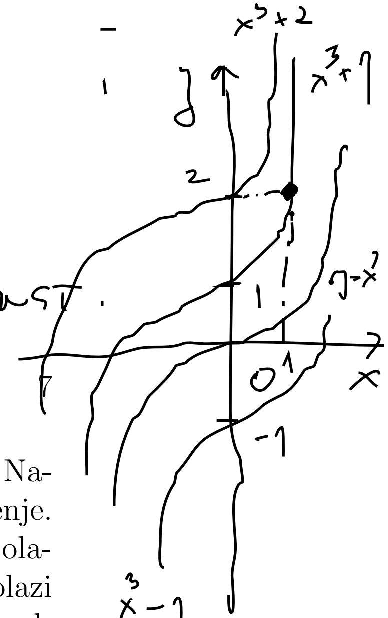
$y = x^3$ JE REŠ. $\quad y' = 3x^2 \quad 3x^2 = 3x^2$ ✓

$y = x^3 + C$ su TAKOĐE REŠENJA, JER

$y' = 3x^2 \rightsquigarrow 3x^2 = 3x^2$ ✓

$y = x^3 + C$, gde je C PROIZ. KONST.

OPŠTE REŠENJE.



$x^3 - 1$

$(C = -1)$

jednačine. Zaista, diferenciranjem dobijamo da je $y' = (x^3 + C)' = 3x^2$. Napominjemo da ćemo rešenje $y = x^3 + C$ kasnije definisati kao opšte rešenje. U geometrijskom smislu, dobili smo familiju krivih koje zadovoljavaju polaznu jednačinu $y' = 3x^2$. Primetimo da samo jedna kriva iz ove familije prolazi kroz datu tačku $(1, 2)$. Za tu specijalnu krivu mora da važi: $2 = 1^3 + C$, odnosno $C = 1$. Dakle, specijalno rešenje koje prolazi kroz datu tačku (početni uslov) ima jednačinu $y = x^3 + 1$. Ovo rešenje ćemo kasnije nazvati partikularno rešenje.

FAMILIJA REŠENJA (KRIVIH)

Opšte rešenje diferencijalne jednačine oblika $F(x, y, y') = 0$ je funkcija $y = \phi(x, C)$ koja zavisi od jednog parametra (konstante) C i za koju važi:

a) zadovoljava diferencijalnu jednačinu, tj. $F(x, \phi(x, C), \phi'(x, C)) = 0$ za svako x iz oblasti rešenja D,

b) za svaki početni uslov $(x, y) = (x_0, y_0)$ iz oblasti rešenja, može se jednoznačno odrediti konstanta $C = C_0$ tako da $y = \phi(x, C_0)$ zadovoljava početni uslov, tj. da je $y_0 = \phi(x_0, C_0)$.

POČETNI USLOV:

$y(1) = 2$

$y(1) = 1^3 + C =$

$= 1 + C$

$1 + C = 2$

$C = 2 - 1 = 1$

$\boxed{y = x^3 + 1}$

PARTIKULARNO REŠENJE

Prilikom rešavanja različitih diferencijalnih jednačina nije uvek moguće izraziti opšte rešenje u eksplicitnom obliku $y = \phi(x, C)$, zato opšte rešenje često dobijamo u implicitnom obliku $\Phi(x, y, C) = 0$. Postupak rešavanja diferencijalne jednačine se uglavnom svodi na integraciju, zato rešenje se ponekad naziva **integral diferencijalne jednačine.**

Rešenje koje se dobija iz opšteg rešenja za konkretan izbor konstante $C = C_0$ naziva se **partikularno rešenje.** Dakle, svaki početni uslov definiše jedno partikularno rešenje.

1.2.1 Jednačine koje razdvaju promenljive

Diferencijalna jednačina oblika

$$\int \int \quad M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

gde su $M(x)$ i $N(y)$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom koje zavise samo od x i y, respektivno, naziva se **diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive.** Opšte rešenje ove jednačine se dobija direktnom integracijom

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

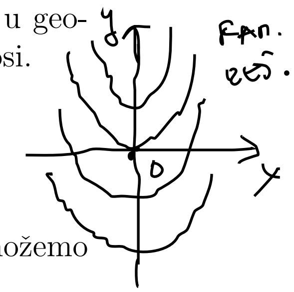
 $\int dy - \int x\,dx = C \iff y - \frac{x^2}{2} = C \iff y = C + \frac{x^2}{2}$

Primer 2 *Rešiti diferencijalnu jednačinu $dy - xdx = 0$.* $\iff \frac{dy}{dx} - x = 0 \iff y' - x = 0$

Direktnom integracijom dobijamo sledeću jednačinu koja predstavlja opšte rešenje

$$y - \frac{x^2}{2} = C, \text{ odnosno } y = \frac{x^2}{2} + C,$$ ← OPŠTE REŠENJE

gde je C proizvoljna konstanta. Nije teško videti da ovo opšte rešenje u geometrijskom smilsu predstavlja familiju paraboloida sa temenima na y-osi.



Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f(x)g(y)$$

takođe pripada klasi koja razdvaja promenljive. Zaista, datu jednačinu možemo transformisati na oblik

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \iff \frac{1}{g(y)}dy - f(x)dx = 0$$

M N

gde je funkcija $g(y) \neq 0$. Uz pretposatvku da su podintegrale funkcije neprekidne u posmatranoj oblasti, opšte rešenje možemo dobiti direktnom integracijom

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

1.2.2 Homogene jednačine

$f\left(\frac{y}{x}\right) = \dfrac{\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}}{1 + \frac{y^3}{x^3}}$

Difrencijalne jednačine oblika

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

$f\left(\frac{y}{x}\right) =$

nazivaju se **homogene jednačine.** Neka je $f(t)$ neprekidna funkcija na nekom oblašću $D \subseteq \mathbb{R}$. Uvdođenjem smene

$t = \frac{y}{x}$

$t = t(x)$ $$\boxed{t(x) = \frac{y(x)}{x}} \Leftrightarrow y(x) = x \cdot t(x),$$

PRIMER

$y' = \dfrac{\frac{y}{x} + 3 \cdot \frac{y^2}{x^2}}{1 + \frac{y}{x}}$

i diferenciranjem poslednje jednakosti dobijamo

$$y' = t + xt'.$$

$y' = (x \cdot t)' = x' \cdot t + x \cdot t' = t + xt'$

$t + xt' = f(t)$, $t' = \frac{dt}{dx}$

$t + x\frac{dt}{dx} = f(t) \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = f(t) - t$

$$\frac{x}{dx} = \frac{f(t)-t}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$$

JEDNAČINA KOJA RAZDVAJA PROM

Sada polazna homogena diferencijalna jednačina se svodi na jednačinu sa razdvojenim promenljivama

$$t + xt' = f(f) \;\Leftrightarrow\; t' = \frac{f(t)-t}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}.$$

Uz pretpostavku da je $f(t)-t \neq 0$ nad oblašću D, opšte rešenje možemo dobiti integracijom poslednje jednačine

$$\int \frac{dt}{f(t)-t} = \ln x.$$

Primer 3 *Rešiti diferencijalnu jednačinu* $(x-y)y' = \cancel{2}(x+y)$.

$(x-y)\,y' = (x+y)$

Datu jednačinu možemo da transformišemo, uz pretpostavku da je $x - y \neq 0$, na sledeći način

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \;\begin{matrix} /:x \\ /:x \end{matrix}\; \Leftrightarrow\; \boxed{y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}},$$

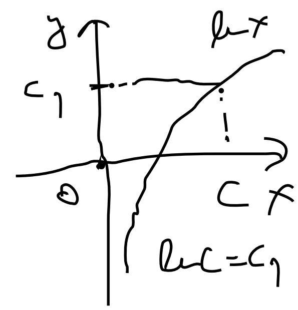
što predstavlja homogenu diferencijalnu jednačinu. Uvođenjem predložene smene $t = \frac{y}{x}$, odnosno $y' = t'x + t$, jednačina se svodi na sledeći oblik

$$t'x + t = \frac{1+t}{1-t} \;\Rightarrow\; \frac{1-t}{1+t^2}dt = \frac{dx}{x}.$$

Poslednja jednačina razdvaja promenljive, tako da ćemo je rešavati direktnom integracijom

c_1

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-t}{1+t^2}dt \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln x + \ln C,$$



primetimo da smo konstantu zamenili sa $\ln C$, što je dozvoljeno jer je kodomen funkcije ln ceo skup realnih brojeva. Sređivanjem poslednjeg izraza dolazimo do jednačine

$$\ln \frac{x\sqrt{1+t^2}}{C} = \operatorname{arctg} t,$$

a traženo opšte rešenje dobijamo vraćanjem smene $t = \frac{y}{x}$

$$= \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln z =$$

$$= \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

$$\boxed{\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}}.$$

$$\int \frac{1-t}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} =$$

$$1+t^2 = z \Rightarrow 2t\,dt = dz \Rightarrow t\,dt = \frac{1}{2}dz$$

$\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln x + \ln C$

$\operatorname{arctg} t - \ln\sqrt{1+t^2} = \ln x + \ln C$

$\operatorname{arctg} t - \ln\sqrt{1+t^2} - \ln x - \ln C = 0$

$\operatorname{arctg} t - (\ln\sqrt{1+t^2} + \ln x + \ln C) = 0$

$\operatorname{arctg} t - (\ln(x\sqrt{1+t^2}\cdot C)) = 0$

$\ln(C\cdot x\sqrt{1+t^2}) = \operatorname{arctg} t$

$\boxed{t = \frac{y}{x}}$

$C\cdot x\cdot\sqrt{1+t^2} = e^{\operatorname{arctg} t}$

$x\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{C} e^{\operatorname{arctg} t}$

$x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = C\cdot e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$

$\sqrt{x^2+y^2} = C e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$

OPŠTE REŠENJE

Ako želimo da posmatramo familiju krivih koju definiše opšte rešenje, vredi preći na polarne koordinate $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$. Tada važi da je

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \ \text{ i } \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \ \Rightarrow \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

odnosno opšte rešenje u odnosu na polarne koordinate ima oblik

$$r = Ce^{\varphi}.$$

Sada je jasno da opšte rešenje predstavlja familiju logaritamskih spirala sa zajedničkom početnom tačkom u koordinatnom početku.

Beleške

PRIMER NAĆI OPŠTE REŠENJE D.J.

$$xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$$

REŠ.

$xy' - y = \sqrt{x^2+y^2} \quad / : x$

$y' - \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

$y' - \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$

$y' - \frac{y}{x} = \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$

$y' = \underbrace{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}}_{f(\frac{y}{x})}$ ← HOMOGENA D.J.

$\boxed{t = \frac{y}{x}} \to y = tx \to y' = t'x + t$

$t'x + \cancel{t} = \sqrt{1+t^2} + \cancel{t}$

$t'x = \sqrt{1+t^2}$ JEDN. KOJA RAZDVAJA PROM

$\frac{dt}{dx}x = \sqrt{1+t^2} \longrightarrow \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C$

TABLIČNI INT.

$\ln(t+\sqrt{1+t^2}) = \ln x + \ln C$

$\ln(t+\sqrt{1+t^2}) = \ln xC$

$t + \sqrt{1+t^2} = xC$

$t = \frac{y}{x}$

$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = xC \quad / \cdot x$

$y + \cancel{x}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\cancel{x^2}}} = x^2\cdot C$

$y + \sqrt{x^2+y^2} = x^2\cdot C$ ← OPŠTE REŠ.

$x = x(y)$ $\quad t = \frac{x}{y}$ ...

PRIMER NAĆI OPŠTE REŠENJE $\quad y' = \underbrace{e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}}_{f(\frac{y}{x})}$ ← HOMOGENA D.J.

$t = t(x)$

$t = \frac{y}{\cancel{x}} \to y = t \cdot \cancel{x}$

$y' = t' \cdot x + t$

$t' x + \cancel{t} = e^{t} + \cancel{t} \rightsquigarrow t' x = e^{t}$

$\frac{dt}{dx} \cdot x = e^{t} \to \int \frac{dt}{e^{t}} = \int \frac{dx}{x} \rightsquigarrow \int e^{-t} dt = \ln x + \ln c = \ln(xc)$

$-e^{-t} = \ln(xc) \qquad t = \frac{y}{\cancel{x}}$

$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln(x \cdot c)$

$e^{-\frac{y}{x}} = \ln \frac{1}{x \cdot c}$ ← OPŠTE REŠENJE

PRIMER REŠITI D.J.

$$2e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right)dx + \left(1 + 2e^{\frac{y}{x}}\right)dy = 0 \quad / : \cancel{dx}$$

$$2e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right) + \left(1 + 2e^{\frac{y}{x}}\right)\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{}{}^{\text{"}y'\text{"}} = 0$$

$$y'\left(1 + 2e^{\frac{y}{x}}\right) = -2e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$$

$$y' = \underbrace{-\frac{2e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right)}{1 + 2e^{\frac{y}{x}}}}_{f(\frac{y}{x})}$$ ← HOMOGENA D.J. → $t = \frac{y}{\cancel{x}}$ ...