(*) ALTERNATIVNI REDOVI (NAIZMENIČNI REDOVI)

• RED ČIJI ČLANOVI NAIZMENOČNO MENJAJU PREDZNAK NAZIVA SE ALTERNATIVNI RED :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots ,$$

GDE JE $b_k = |a_k|$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

ALT. REDOVI IMAJU BESKONAČNO MNOGO ČLANOVA SA $(+)$ I BESKONAČNO MNOGO ČLANOVA SA $(-)$ PREDZNAKOM.

PRIMER

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2 = S$$

↑ ALT. RED

DEF. AKO JE RED $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ KONVERGENTAN, ONDA SE KAŽE DA JE RED $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ APSOLUTNO KONVERGENTAN

DEF. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ USLOVNO KONVERGIRA, AKO

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ KONVERGIRA A $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ DIVERGIRA.

PRIMER VIDELI SMO DA RED $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ KONVERGIRA.

MEĐUTIM, RED $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ DIVERGIRA (KAO HARM. RED)

DAKLE, RED $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ USLOVNO KONVERGIRA. P2

PRIMER ISPITAJMO APSOLUTNU KONVERGENCIJU REDA

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{2k-1}\right)^k.$$

REŠ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{k}{2k-1}\right)^k}_{b_k}$$

, PRIMENIMO KOŠIJEV (KORENSKI) KRIT:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ RED JE APSOLUTNO KONVERGENTAN.

T IZ KONVERGENCIJE REDA $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ SLEDI KONVERGENCIJA REDA $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

|| IZ APS. KONVERGENCIJE SLEDI „OBIČNA KONV."

DAKLE, APSOLUTNA KONV. JE „JAČA" OD „OBIČNE" KONV.

T (LAJBNICOV KRITERIJUM KONVERGENCIJE ALTERNATIVNIH REDOVA)

NEKA JE $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k$ $\left(\text{ILI } \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}b_k\right)$,

GDE JE $b_k>0$ ZA $k=1,2,3,\ldots$, ALTERNATIVAN RED. AKO SU ISPUNJENI USLOVI

1) b_k JE MONOTONO NERASTUĆI NIZ, TJ.

$b_{k+1}\le b_k$ (POČEV OD NEKOG $k\ge k_0$); I

2) $\lim\limits_{k\to\infty} b_k=0$,

ONDA JE RED $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k$ ~~KONV~~ $\left(\text{ILI } \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}b_k\right)$

KONVERGENTAN.

<u>PRIMER</u> ISPITATI KONVERGENCIJU REDA

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1}$, $b_n=\frac{n}{n^2+1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0$ ✓

1) $b_{n+1}\le b_n \iff \frac{n+1}{(n+1)^2+1}\le\frac{n}{n^2+1}\iff (n+1)(n^2+1)\le n((n+1)^2+1)$

$\iff \cancel{n^3}+n^2+n+1\le\cancel{n^3}+2n^2+2n \iff n^2+n+1\le 2n^2+2n$

$\iff 1\le n^2+n$ ✓ $n=1,2,\ldots$

DAKLE, ISPUNJENI SU USLOVI LAJBNICOVE TEOREME (P4)

I RED JE KONVERGENTAN (U OBIČNOM SMISLU).

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$, $b_n = \frac{1}{n-\ln n}$

2) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1-\frac{\ln n}{n})} = 0$ ✓

1) $\underbrace{\frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)}}_{b_{n+1}} \le \underbrace{\frac{1}{n-\ln n}}_{b_n} \Leftrightarrow (n+1)-\ln(n+1) \ge n-\ln n$

$\Leftrightarrow 1-\ln(n+1) \ge -\ln n \Leftrightarrow 1 \ge \ln(n+1)-\ln n$

$\Leftrightarrow 1 \ge \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \ln e \ge \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e \ge 1+\frac{1}{n}$ ✓, $n = 1, 2, 3 \ldots$

NA OSNOVU ~~ZA~~ LABNICOVOG KRITIERIJUMA I

ISPUNJENOSTI USLOVA 1) I 2), SLEDI KONVERGENCIJA

POLAZNOG REDA

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n$, $b_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

DAKLE, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n \neq 0 \Rightarrow$ RED D (OPŠTI ČLAN NE TEŽI NULI!

• ZA OSTATAK R_n ALTERNATIVNOG REDA: (P5)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} b_k + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot b_k}_{R_n}$$

VAŽI:

$$|R_n| < |(-1)^{n+2} b_{n+1}| = b_{n+1}.$$

"OSTATAK REDA JE MANJI OD APSOLUTNE VREDNOSTI PRVOG IZOSTAVLJENOG ČLANA."

(*) STEPENI REDOVI

• ZA RED $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$,

GDE SU $f_k(x)$ FUNKCIJE, KAŽEMO DA JE <u>FUNKCIONALNI RED</u>. ZA SVAKU KONKRETNU VREDNOST PROMENLJIVE $x = x_0$, DOBIJAMO BROJNI RED: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$, KOJI MOŽE DA (K) ILI (D). SKUP SVIH VREDNOSTI PROM. x ZA KOJE FUNK. RED KONVERGIRA NAZIVA SE <u>OBLAST (ILI INTERVAL) KONVERGENCIJE REDA</u>.

- ANALOGNO KAO ZA BROJNE REDOVE,

ZA FUNKCIONALNE REDOVE DEFINIŠEMO:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$ <u>n-TU PARCIJALNU SUMU</u> I

<u>SUMU REDA</u> $S(x)$ KAO GRANIČNU VREDNOST

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

AKO NIZ $\{s_n(x)\}$ KONVERGIRA KA FUNKCIJI $S(x)$ (SUMI REDA)

ZA SVAKO $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, ONDA KAŽEMO DA FUNK. RED <u>KONVERGIRA NA SKUPU I</u> KA FUNKCIJI $S(x)$ (SUMI REDA).

<u>PRIMER</u> AKO U GEOM. REDU

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q|<1,$$ STAVIMO OZNAKU $q=x$

DOBIJAMO FUNK. RED $$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots = \frac{1}{1-x}, \text{ ZA } |x|<1,$$

DAKLE, OBLAST KONVERGENCIJE JE INTERVAL $(-1,1)$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\substack{\parallel \\ S(x) \\ \text{SUMA REDA}}}, \quad |x|<1$$

- ~~OPŠ STEPE~~

OPŠTI OBLIK STEPENOG REDA JE

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad , \text{ GDE SU } a, a_k \in \mathbb{R} \quad k=0,1,2,\ldots$$

a_k SU KOEFICIJENTI STEPENOG REDA. STEPENI REDOVI SU SPECIJALNI FUNKCIONALNI REDOVI.

ČESTO POSMATRAMO SLUČAJ KADA JE $a=0$:

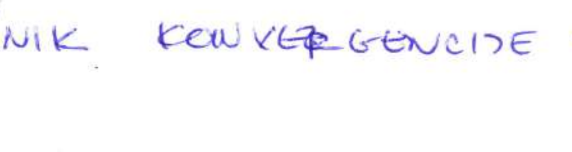
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

OBLAST KONVERGENCIJE ZAVISI OD OSOBINA NIZA a_k.

- POLUPREČNIK KONVERGENCIJE STEPENOG REDA

(T) (ABELOVA TEOR.) AKO STEPENI RED $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ KONV. ZA $x = x_0$, ONDA ON KONV. I ZA SVE VREDNOSTI x ZA KOJE JE $|x| < |x_0|$.

$$|x| < |x_0| \iff x \in (-x_0, x_0)$$



POSLEDICA ABELOVE TEOREME. POSTOJI REALAN BROJ $R>0$, TAKO DA RED $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ KONVERGIRA ZA $x \in (-R, R)$, A DIVERGIRA ZA $|x| > R$. R SE NAZIVA POLUPREČNIK KONV.

INTERVAL $(-R, R)$ JE ~~OBLAST~~ INTERVAL KONVERGENCIJE. (PJ)

KONVERGENCIJU REDA U TAČKAMA $x=R$ I $x=-R$ POTREBNO JE POSEBNO ISPITATI, U TIM TAČKAMA RED $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ MOŽE I DA (K) I DA (D).

~~ODREĐENO~~

(T) (KOŠI – ADAMAROVA TEOREMA) POLUPREČNIK KONVERGENCIJE STEPENOG REDA $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ JE BROJ R

ZA KOJI VAŽI:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{ILI} \quad R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| .$$

DOKAZ NA OSNOVU KOŠIJEVOG KRITERIJUMA RED $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ KONVERGIRA, AKO JE

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} < 1 \iff \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| < 1 \iff$$

$$\iff |x| < \frac{1}{\lim \sqrt[k]{|a_k|}} = R$$

SLIČNO, AKO KORISTIMO DALAMBEROV KRIT. ZA KONVERGENCIJU REDA $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$, DOBIĆEMO DRUGU FORMULU $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

- UKOLIKO POSMATRAMO STEPENI RED

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \xrightarrow{\text{SMENA}} x-a=t \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

$$\rightarrow \overset{\text{ODREDIMO}}{R} \rightarrow t \in (-R, R) \rightarrow x-a \in (-R, R)$$

$$\Leftrightarrow x \in (a-R, a+R)$$

$$-R \leq x-a \leq R \Leftrightarrow x \geq -R+a \wedge x \leq R+a$$

$$\Leftrightarrow a-R \leq x \leq a+R \Leftrightarrow x \in (a-R, a+R)$$

(*) OSOBINE STEPENIH REDOVA

POSMATRAJMO STEPENI RED $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ I NEKA JE

I ZATVORENI INTERVAL SADRŽAN U OBLASTI KONVERGENCIJE.

TADA VAŽE SLEDEĆE OSOBINE:

1) SUMA STEPENOG REDA $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ JE NEPREKIDNA FUNKCIJA ZA SVAKO $x \in I$.

2) NEKA SU $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ I $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ STEPENI REDOVI SA POLUPREČNICIMA KONVERGENCIJE R_1 I R_2 TADA ZBIR

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k$$

JE STEP. RED KOJI KONVERGIRA ZA $x \in (-R, R)$, GDE JE $R = \min\{R_1, R_2\}$

3) STEPENI RED SE MOŽE INTEGRALITI „ČLAN PO ČLAN"

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_k t^k dt\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^{k+1}}{k+1} \Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

4) STEPENI RED SE MOŽE DIFERENCIRATI „ČLAN PO ČLAN"

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$$

POLUPREČNIK KONVERGENCIJE DOBIJENIH REDOVA POD 3) I 4) JE JEDNAK ~~POLAZ~~ POLUPREČNIKU POLAZNOG STEPENOG REDA.

PRIMER ODREDITI SUMU REDA $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$, $x \in \underset{\text{OBLAST KONV}}{(-1,1]}$.

REŠ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot t^{k-1} dt$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln|1+t| \Big|_0^x = \ln(1+x)$$

SMENA $n = k-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} \quad -t \in (-1,1) \Leftrightarrow t \in (-1,1)$$

(*) TEJLOROV I MAKLORENOV RAZVOJ FUNKCIJE (P11)

DATA JE FUNKCIJA → ODREDIMO ODGOVARAJUĆI RED ?

$$f(x) \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

NEKA JE

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad \text{ZA} \quad x \in (a-R, a+R).$$

$$a_k = ? \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

TREBA DA VAŽI

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \ldots$$

⇓ DIFERENCIRANJEM, DOBIJAMO SLEDEĆE JEDNAČINE

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \ldots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + 4 \cdot 3a_4(x-a)^2 + \ldots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x-a) + \ldots$$

SPECIJALNO ZA $x = a$, IMAMO

$$f(a) = a_0, \quad f'(a) = a_1, \quad f''(a) = 2a_2, \quad f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot a_3$$

ODNOSNO

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = f'(a), \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

ILI U OPŠTEM SLUČAJU

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

AKO SADA UVRSTIMO DOBIJENE KOEFICIJENTE U STEPENI RED, DOBIJAMO

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

OVAJ RED SE NAZIVA <u>TEJLOROV RED</u> FUNKCIJE $f(x)$ U OKOLINI TAČKE a. SPECIJALNO, AKO JE $a=0$, RED SE NAZIVA <u>MAKLORENOV RED</u>.

- MAKLORENOVI RAZVOJI NEKIH FUNKCIJA

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1,1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in (-1,1]$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1,1)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

P13

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}$$