TEORIJA REDOVA

(*) BROJNI REDOVI

NEKA JE $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ BESKONAČAN NIZ BROJEVA.

ZADATAK JE ODREDITI ZBIR SVIH ČLANOVA NIZA.

ZBIR PRVIH n ČLANOVA NIZA JE NIZ s_n:

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

SPECIJALNO,

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

ZBIR SVIH ČLANOVA NIZA $\{a_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ DOBIJAMO

KAO GRANIČNA VREDNOST NIZA s_n.

UVODIMO OZNAKE

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R},$$

UKOLIKO GRANIČNA VREDNOST S POSTOJI.

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ NAZIVAMO <u>BROJNIM REDOM</u>, GDE JE a_k <u>OPŠTI ČLAN REDA</u>.
- NIZ s_n JE NIZ <u>PARCIJALNIH SUMA</u>.
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
  - <u>KONVERGENTAN</u>, AKO $\lim_{n\to\infty} s_n$ POSTOJI, $S \in \mathbb{R}$
  - ILI
  - <u>DIVERGENTAN</u>, AKO $\lim_{n\to\infty} s_n$ NE POSTOJI

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU REDA, AKO JE (P2)

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k$; b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$; c) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

REŠ.

a) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$, DAKLE

RED $\sum_{k=1}^{\infty} k$ DIVERGIRA.

b) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$\lim_{n\to\infty} s_n > \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, DAKLE RED $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ DIVERGIRA

c) $$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^n = 1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$ (GEOM. PROGRESIJA)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & |q|<1 \\ \infty, & q \geq 1 \\ \text{NE POSTOJI} & q \leq -1 \end{cases}$$ I DAKLE

GEOMETRIJSKI RED $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ KONVERGIRA ZA $|q|<1$, A DIVERGIRA ZA OSTALE q

- OSNOVNE OPERACIJE SA REDOVIMA

1) ZA $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k$$

2)
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$$
, PRI TOME VAŽI

$$(K) + (K) = (K) \; ; \; (K) + (D) = (D) \, , \; (D) + (D) = ?$$

~~PRIMER~~

$$\cancel{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \, , \, \sum_{k=1}^{\infty}}$$
~~, ZAISTA~~

$$\cancel{= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > n \cdot \frac{1}{n} = 1}$$

3)
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$
, GDE JE

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + a_3 b_{k-3} + \dots$$
$$\dots + a_k b_0$$

* KRITERIJUM ZA KONVERGENCIJU BROJNIH REDOVA

(POTREBAN USLOV ZA KONVERGENCIJU)

T AKO RED $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ KONVERGIRA, ONDA JE $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

$$\sum a_k \; (K) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

$$\Updownarrow \quad \text{(TAUTOLOGIJA: ZAKON KONTRAPOZICIJE)}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k \; (D)$$

DOKAZ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \longrightarrow a_k = s_k - s_{k-1}$, TADA VAŽI

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \underbrace{\lim_{k\to\infty} s_k}_{=S} - \underbrace{\lim_{k\to\infty} s_{k-1}}_{=S} = S - S = \underline{\underline{0}}$$

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU SLEDEĆIH REDOVA

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+3}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

REŠ

a) $a_n = \frac{n^2+1}{n+3}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = +\infty$

$\Downarrow$

RED (D)

25

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

$\Rightarrow$ RED D

(*) KRITERIJUMI ZA REDOVE SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

ZA RED $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ KAŽEMO DA JE RED SA POZITIVNIM ČLANOVIMA, AKO JE $a_k \geq 0$, ZA SVE $k = 0, 1, \ldots$

- UPOREDNI KRITERIJUM 1 (UK1)

AKO ZA OPŠTE ČLANOVE a_k I b_k BROJNIH REDOVA $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ I $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ VAŽI DA JE $0 \leq a_k \leq b_k$, POČEV OD NEKOG $k_0 \in \mathbb{N}$ (TJ. ZA $k \geq k_0$), TADA VAŽI

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \; D \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k \; D$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \; K \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; K$$

- $a_k \sim b_k \iff \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$, ZA NEKO $l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$

"ISTO SE PONAŠA" ZA $k \to \infty$

(ČESTO $l = 1$)

P6

- UPOREDNI KRITERIJUM 2 (UK2)

AKO ZA BROJNE REDOVE $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ I $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ VAŽI

$a_k \sim b_k$ ZA $k \to \infty$, ONDA

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ (K) \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k \ (K).$$

$$\sum a_k \ (D) \overset{!}{\iff} \sum b_k \ (D)$$

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU REDA $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k - 2k}$.

REŠ.

$$a_k = \frac{1}{3^k - 2k} \underset{k \to \infty}{\sim} \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

RED $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ JE GEOM. I $q = \frac{1}{3}$, DAKLE $|q| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$, SLEDI DA JE (K).

NA OSNOVU KONVERGENCIJE $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^k$ SLEDI I KONVERGENCIJA REDA $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k - 2k}$, PRI TOME SMO KORISTILI UK2.

- DALAMBEROV (KOLIČNIČKI) KRITERIJUM

AKO ZA BROJNI RED $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0$, POSTOJI

$l \in \mathbb{R}$, TAKAV DA JE $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$, TADA VAŽI:

$l < 1 \Rightarrow \sum a_k$ (K),

$l > 1 \Rightarrow \sum a_k$ (D),

$l = 1 \Rightarrow$ DALAMB. KRIT. NE DAJE ODGOVOR, POTREBNA SU DALJA ISPITIVANJA.

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU REDA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

REŠ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\overset{\cancel{n!}\cdot(n+1)}{(n+1)!} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cancel{2^n} \cdot \cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \cancel{(n+1)} \cdot n^n}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\underset{\shortparallel\, e}{e}} < 1 \overset{\text{DALAM. KRIT.}}{\Rightarrow} \text{RED (K)}$$

PJ

• KOŠIJEV (KORENSKI) KRITERIJUM

AKO ZA BROJNI RED $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0$, UVEDEMO OZNAKU DA JE $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$, TADA VAŽI:

$l < 1 \Rightarrow \sum a_k$ (K),

$l > 1 \Rightarrow \sum a_k$ (D),

$l = 1 \Rightarrow$ KOŠIJEV KRIT. NE DAJE ODGOVOR, POTREBNA SU DALJA ISPITIVANJA.

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU REDA $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+3)}$.

REŠ.

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n\cdot(n+3)}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2+2-2}{n+2}\right)^{n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{n+3} \overset{1^{\infty}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{-4}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{(-4)}}}_{\to e}{}^{\cdot (n+3) \cdot \frac{-4}{n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4(n+3)}{n+2}} = e^{-4} = \frac{1}{e^4} < 1$$

$$\boxed{l = \frac{1}{e^4} < 1 \Rightarrow \text{RED (K)} \quad \text{KOŠIJEV KRIT.}}$$

- INTEGRALNI KRITERIJUM

PRETPOSTAVIMO DA JE FUNKCIJA $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ NEPREKIDNA, POZITIVNA I MONOTONO OPADAJUĆA, I DA JE $f(k)=a_k$. TADA VAŽI

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ (K) \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \ (K)$$

↑ NESVOJSTVENI INTEGRAL

PRIMER ISPITATI KONVERGENCIJU REDA

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}\text{, ZA } p\in\mathbb{R}$$

(HIPERHARMONIJSKI RED).

REŠ. FUNKCIJA $f(x)=\frac{1}{x^p}$ ZADOVOLJAVA USLOVE INTEG. KRIT.

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_1^{T} x^{-p}\,dx = \lim_{T\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{T} =$$

$(p\neq 1)$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{T^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1} =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{T^{p-1}}-\frac{1}{1-p} = \begin{cases} +\infty, & p-1<0 \iff p<1\\ \frac{1}{p-1}, & p-1>0 \iff p>1\end{cases}$$

$(p\neq 1)$

ZA $p = 1$

P10

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \ln x \Big|_1^T = \lim_{T\to\infty}(\ln T - \ln 1) =$$

$$= \infty - 0 = +\infty \Rightarrow D$$

ZAKLJUČAK:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \begin{cases} K & \text{ZA } p > 1 \\ D & \text{ZA } p \le 1 \end{cases}$$

ZA $p = 1$ → HARMONIJSKI RED, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.