KRIVOLINIJSKI INTEGRALI

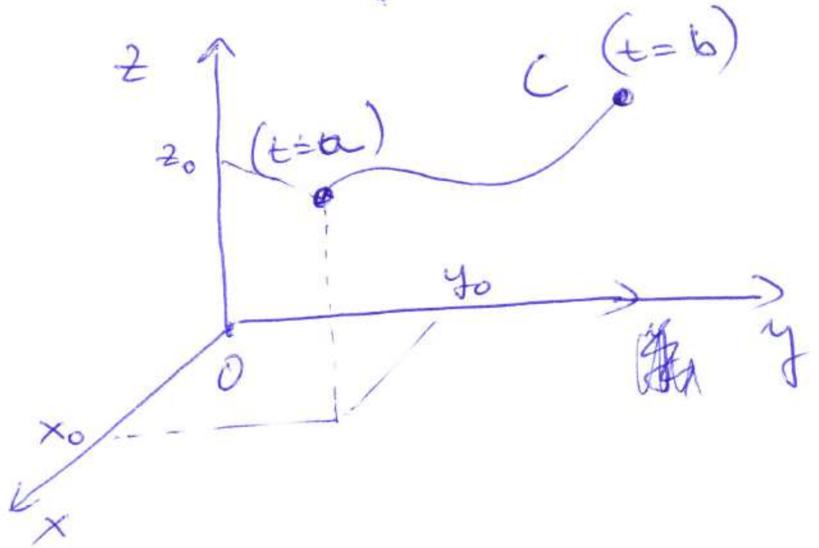
(*) KRIVE I PARAMETRIZACIJA KRIVIH

KRIVU U PROSTORU PREDSTAVLJAMO POMOĆU VEKTORSKE FUNKCIJE OD JEDNE PROMENLJIVE:

$$\vec{r} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{ODNOSNO}$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

GDE SU SKALARNE FUNKCIJE $x(t), y(t), z(t)$ NAZIVAJU PARAMETARSKE FUNKCIJE KRIVE, A t JE PARAMETAR.



$x(a) = x_0$
$y(a) = y_0$
$z(a) = z_0$

VEKTORSKA JEDNAČINA KRIVE C:

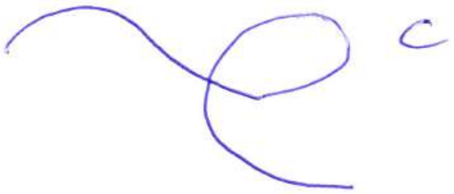
$$C: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$
$$(I \subseteq \mathbb{R})$$

U SLUČAJU RAVANSKE KRIVE $(z(t) = 0)$:

$$C: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in I$$

• KRIVA JE <u>PROSTA</u>, AKO JE $\vec{r}(t)$ INJEKTIVNO PRESLIKAVANJE, TJ. $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$.

PROSTA KRIVA NEMA TAČAKA SAMOPRESEKA.



NIJE PROSTA KRIVA!

• KRIVA ~~A~~ JE <u>ZATVORENA</u>, AKO JE $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, GDE JE KRIVA DEFINISANA PRESLIKAVANJEM: $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$.

$A = \vec{r}(a)$

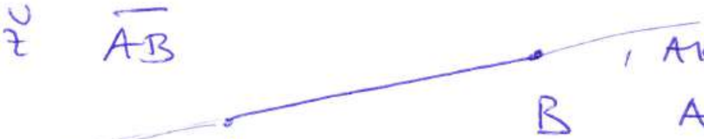
$B = \vec{r}(b)$

ZATVORENA KRIVA!

• PARAMETRIZACIJA KRIVE PODRAZUMEVA POSTUPAK ODREĐIVANJA VEKTORSKE (ILI PARAMETARSKE) JEDNAČINE KRIVE, ODNOSNO FUNKCIJA $x(t)$, $y(t)$ I $z(t)$.

<u>PRIMER</u> ODREDITI PARAMETARSKE REPREZENTACIJE ZA

a) DUŽ $\overline{AB}$, AKO JE $A(a_1, a_2, a_3)$ I $B(b_1, b_2, b_3)$



$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$t = 0 \Rightarrow \vec{r} = A$

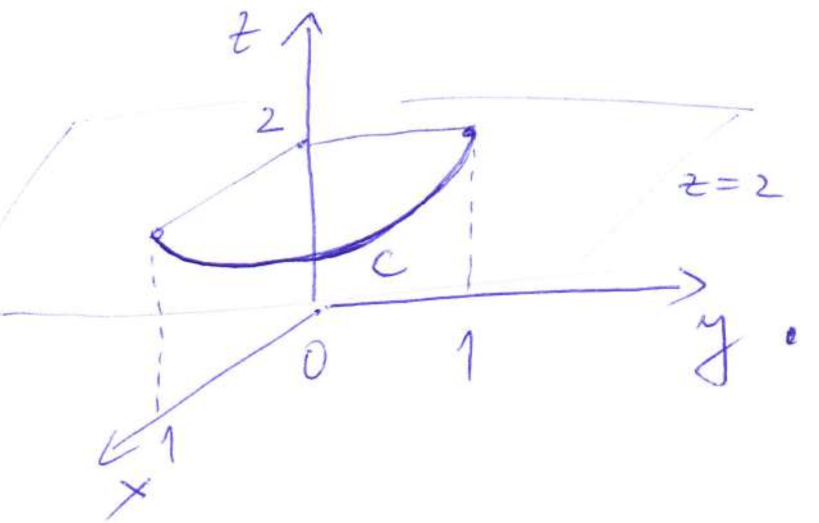
$t = 1 \Rightarrow \vec{r} = B$

$$p_{AB}: \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} = t \Rightarrow \begin{aligned} x &= a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z &= a_3 + t(b_3 - a_3) \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{r}(t) = \left(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3)\right)$$

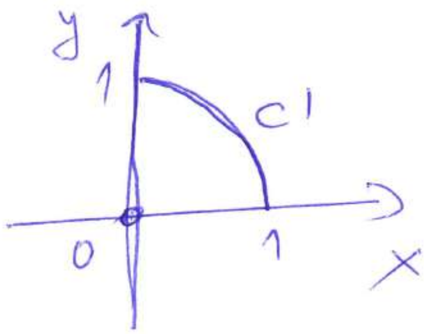
b) DEO KRUŽNICE, KAO ŠTO JE NA SLICI



REŠENJE:

~~PRESEK~~

PROJEKCIJA C NA xOy RAVAN



$$x = r\cos t \qquad (r=1)$$
$$y = r\sin t$$

$$C : \begin{cases} (x,y) \in C' \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$C : \begin{array}{l} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ z = 2 \end{array} \qquad C' : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{C: \ \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2), \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]}$$

c) ZA KRIVU KOJA PREDSTAVLJA PRESEK CILINDRA $x^2+y^2=4x$, PARABOLOIDA $x^2+y^2=4-z$.

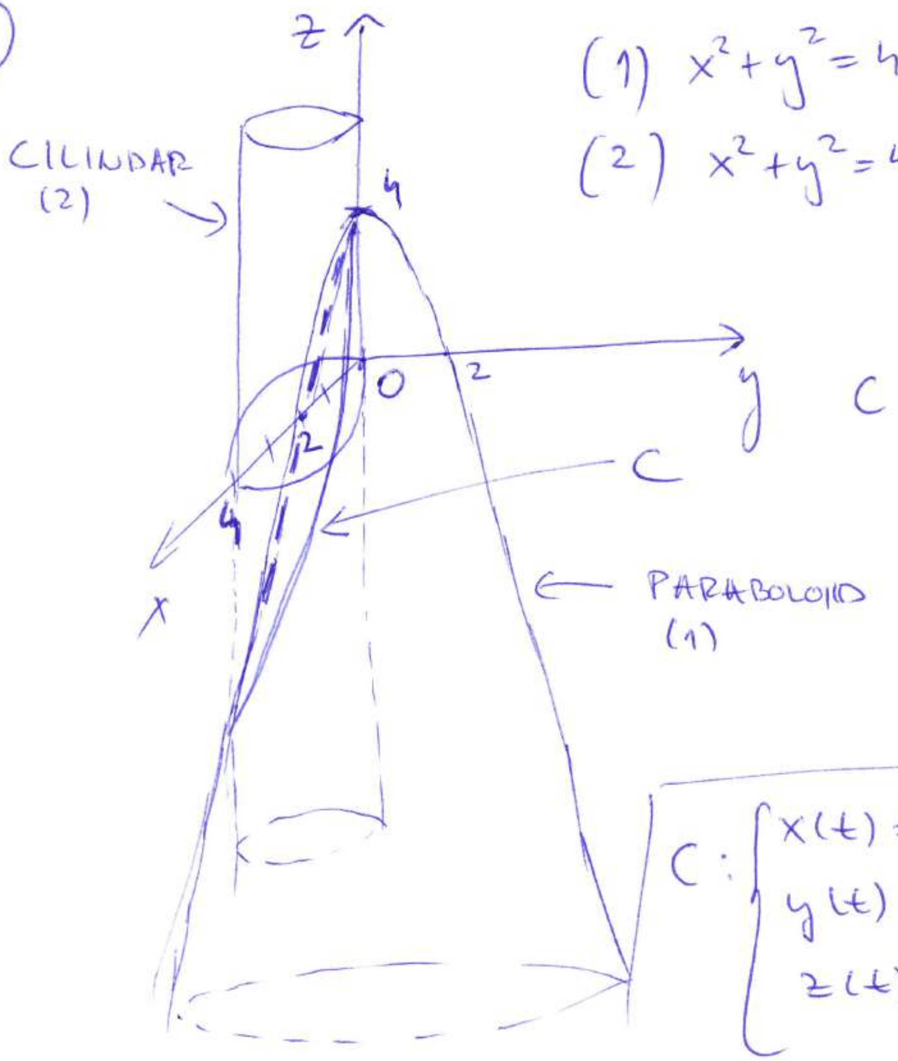
REŠENJE:

$$x^2+y^2=4x \iff (x-2)^2+y^2=4, \qquad 4-z=4x \iff z=4(1-x)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{x-2=\cos t}$$
$$x-2=2\cos t \Rightarrow x = 2(1+\cos t)$$
$$y = 2\sin t \Rightarrow y = 2\cdot\sin t$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

(P4)



(1) $x^2+y^2=4-z \iff z=4-x^2-y^2$

(2) $x^2+y^2=4x \iff (x-2)^2+y^2=4$

$C: \quad x=2(1+\cos t)$

$y=2\sin t$

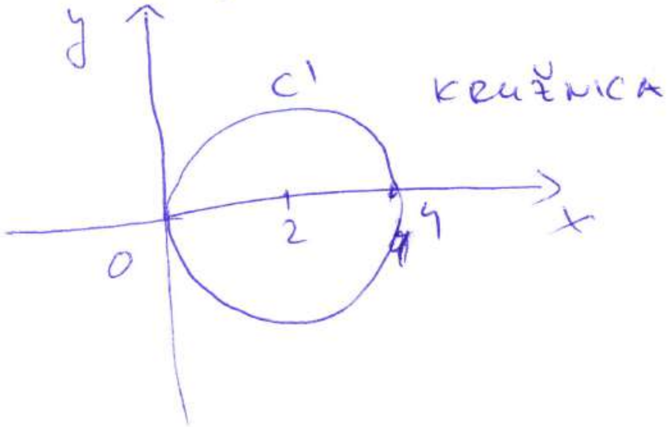
$z=4(1-x)=$

$=4(1-2-2\cos t)$

$=-4(1+2\cos t)$

$$\boxed{C: \begin{cases} x(t)=2(1+\cos t) \\ y(t)=2\cdot\sin t \qquad t\in[0,2\pi] \\ z(t)=-4(1+2\cos t) \end{cases}}$$

$(x-2)^2+y^2=4$ JE PROJEKCIJA C NA xOy RAVAN!



- REPARAMETRIZACIJA KRIVE

NEKA JE DATA KRIVA $C: \vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[a,b]$.

SVAKO BIJEKTIVNO PRESLIKAVANJE $t=\varphi(v)$, GDE JE

$\varphi:[c,d]\to[a,b]$

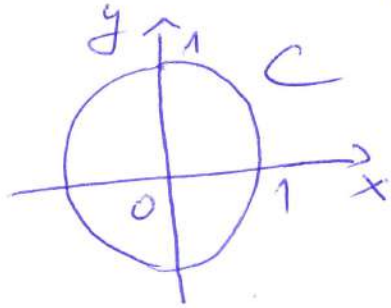
DEFINIŠE JEDNU <u>REPARAMETRIZACIJU KRIVE C</u>:

$$\vec{r}(v)=(x(\varphi(v)),y(\varphi(v)),z(\varphi(v))),\quad v\in[c,d]$$

t - STARI PARAMETAR, v - NOVI PARAMETAR

PRIMER

$$C: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$



$$t = \varphi(\sigma) = 2\sigma \quad \to \quad t = 2\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \\ t = 2\pi \Rightarrow \sigma = \frac{t}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma \in [0, \pi]$$

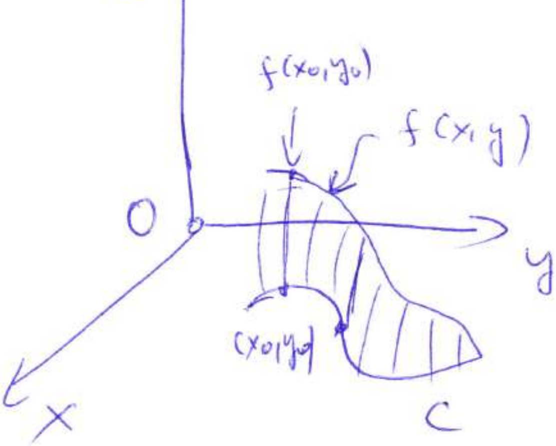
NOVA PARAMETRIZACIJA KRIVE C

$$C: \begin{cases} x(\sigma) = \cos(2\sigma) \\ y(\sigma) = \sin(2\sigma) \\ z(\sigma) = 0 \end{cases} \quad \sigma \in [0, \pi]$$

ILI

$$\boxed{\vec{r}(\sigma) = (\cos(2\sigma), \sin(2\sigma), 0), \quad \sigma \in [0, \pi]}$$

(*) KRIVOLINIJSKI INTEGRAL SKALARNE FUNKCIJE



RAVANSKA KRIVA C
I SKALARNA FUNKCIJA
$z = f(x,y), \quad (x,y) \in C$

*

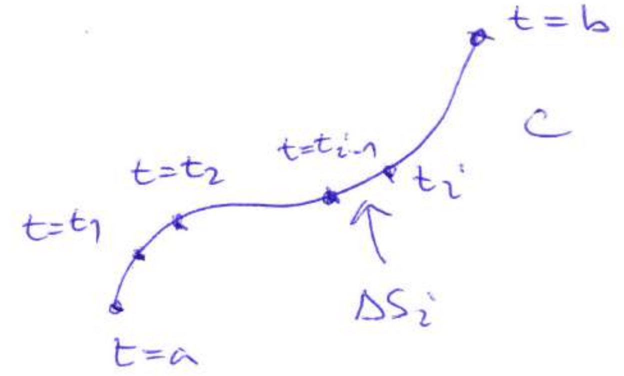
$f(x,y)$ MOŽEMO DA ZAMISLIMO KAO GUSTINU (RASPODELU) MASE DUŽ KRIVE, $f(x,y) = \frac{m(x,y)}{\Delta S}$

ΔS - DUŽINA PODSEGMENTA

POSMATRAJMO:

KRIVU C: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t \in I$,

I FUNKCIJU $z = f(x,y)$, $(x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2$, GDE JE $C \subset G$.



$I = [a,b]$

PODELIMO KRIVU C DEOBNIM TAČKAMA:

$(x(a), y(a)) \to t = t_0 = a$

$(x(t_1), y(t_1)) \to t = t_1$

$(x(t_2), y(t_2)) \to t = t_2$

$\vdots$

$(x(b), y(b)) \to t = t_n = b$

$i = 0, 1, \dots, n$

IZABEREMO PROIZVOLJNO

$t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$, ODNOSNO

JEDNU TAČKU $(x_i^*, y_i^*) = (x(t_i^*), y(t_i^*))$

NA SVAKOM PODSEGMENTU $[t_{i-1}, t_i]$ KRIVE.

OZNAČIMO SA ΔS_i DUŽINU i-TOG PODSEGMENTA KRIVE

DEF. KRIVOLINIJSKI INTEGRAL SKALARNE FUNKCIJE $f(x,y)$ PO KRIVOJ C SE DEFINIŠE KAO GRANIČNA VREDNOST

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(t_i^*), y(t_i^*)) \cdot \Delta S_i,$$

GDE ds NAZIVAMO ELEMENT LUKA ILI DIFERENCIJAL LUKA.

OVAJ INTEGRAL SE PONEKAD ZOVE I KAO KRIV. INT. PRVE VRSTE.

P7

• OSOBINE ~~KRIVINT. SKALARNE FUNK~~.

1) $\int_C \alpha f(x,y)\,ds = \alpha \int_C f(x,y)\,ds, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\int_C \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,ds = \int_C f(x,y)\,ds \pm \int_C g(x,y)\,ds$

3) $\int_C f(x,y)\,ds = \int_{C_1} f(x,y)\,ds + \int_{C_2} f(x,y)\,ds$, GDE JE

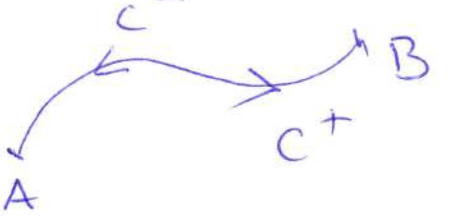
$C = C_1 \cup C_2$ I $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

4) AKO JE C ZATVORENA KRIVA, ONDA SE MOŽE PISATI $\oint_C f(x,y)\,ds$.

5) AKO JE $f(x,y) = 1 \Rightarrow \int_C f(x,y)\,ds = \int_C ds = L(C)$,

$L(C)$ – DUŽINA (LUČNA) KRIVE C

6) NE ZAVISI OD ORIJENTACIJE KRIVE



ORIJENTACIJA (—) SMER KRETANJA PO KRIVOJ

7) AKO JE $f(x,y)$ GUSTINA MASE U (x,y), TJ. $f(x,y) = \dfrac{m(x,y)}{\Delta s_2}$, TADA JE

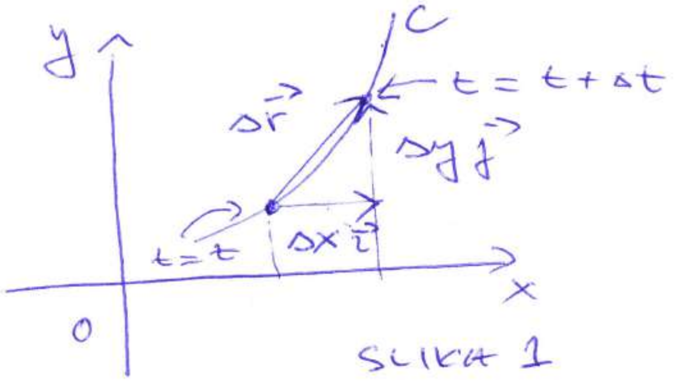
$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_C \frac{m(x,y)}{\cancel{ds}} \cdot \cancel{ds} = M \leftarrow \text{UKUPNA MASA RASPOREĐENA DUŽ KRIVE}$$

(P8)

• NAČIN IZRAČUNAVANJA

POSMATRAJMO KRIVU $C: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, t \in I$, U RAVNI.

$$t \to t + \Delta t \to \Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$



SLIKA 1

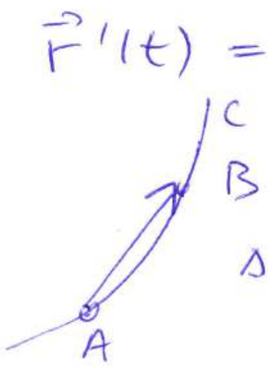
$$\Delta\vec{r} = (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - (x(t), y(t)) =$$
$$= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$$

U GRANIČNOM SLUČAJU, KADA JE $\Delta t \to 0$, IMAMO

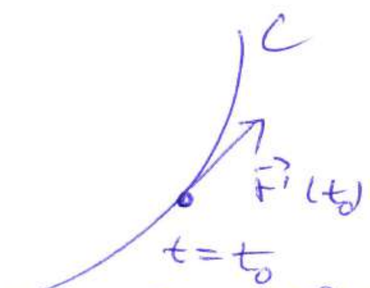
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} =$$
$$= x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}, \text{ DAKLE}$$

ZA IZVOD VEKTORSKE FUNKCIJE POLOŽAJA $\vec{r}$, VAŽI:

$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t))$$



$\Delta t \to 0 \Rightarrow B \to A \Rightarrow \vec{r}\,'(t)$ JE TANGENTNI VEKTOR NA KRIVU C U TAČKI t



U OPŠTEM SLUČAJU

$|\vec{r}\,'(t)| \neq 1$

$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} \leftarrow$ JEDINIČNI VEKTOR TANGENTE

~~Δs~~

POSMATRAJMO Δs, DUŽINU PREĐENOG PUTA DUŽ KRIVE C ZA ~~t~~ $t \to t+\Delta t$. NA OSNOVU SLIKE 1, VIDIMO DA VAŽI APROKSIMACIJA

$$\Delta s \approx |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

U GRANIČNOM SLUČAJU, KADA $\Delta t \to 0$, IMAMO

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}, \quad \text{DAKLE}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = |\vec{r}'(t)|$$

$$ds = |\vec{r}'(t)|\,dt$$

NA SLIČAN, MOŽEMO IZVESTI ~~IZAR~~ IZRAZ I ZA PROSTORNU KRIVU $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$

$$\cancel{|\vec{r}'(t)| =} \quad ds = |\vec{r}'(t)|\,dt = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

SADA MOŽEMO ODREDITI FORMULU ZA IZRAČUNAVANJE KRIV. INT. SKALARNE FUNKCIJE $f(x,y,z)$ NAD KRIVOM $C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$:

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,|\vec{r}'(t)|\,dt}$$

(*) PRIRODNA PARAMETRIZACIJA KRIVE

(P10)

VIDELI SMO DA JE $\int_C ds = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\,dt =$

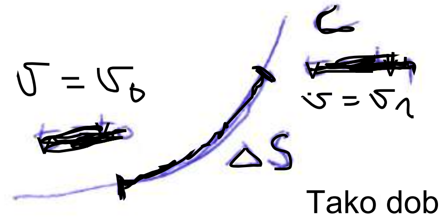
$$= \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt = L(C) \leftarrow \text{DUŽINA LUKA KRIVE}$$

POSMATRAJMO $v(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t)|\,dt$, $v(t)$ JE DUŽINA LUKA KRIVE ZA $a \le t \le t$, DO VREDNOSTI t.

AKO REPARAMETRIZUJEMO KRIVU C, KORISTEĆI DA JE $v = v(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t)|\,dt = \varphi^{-1}(t)$ $\quad (t = \varphi(v))$

DOBIĆEMO PARAMETRIZACIJU $\vec{r}(v)$ KOJA ĆE IMATI OSOBINU DA RAZLIKA VREDNOSTI PARAMETARA ODGOVARA LUČNOJ DUŽINI:

$C : \vec{r}(v)$



$v_1 - v_0 = \Delta S$.

Tako dobijena parametrizacija se zove prirodna parametrizacija.

PRIMER ODREDITI PRIRODNU PARAMETRIZACIJU ZA KRIVU:

$$C : \vec{r}(t) = (2 + t, 3 - t, 5t), \quad t \in [0, 1]$$

Reš. $\vec{r}'(t) = (1, -1, 5)$, $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27}$

$$v(t) = \int_0^t \sqrt{27}\,dt = \sqrt{27}\,t \Big|_0^t = \sqrt{27} \cdot t, \quad v = \sqrt{27} \cdot t$$

$$t = \frac{v}{\sqrt{27}} \; (= \varphi(v)) \rightarrow \boxed{\vec{r}(v) = \left(2 + \frac{v}{\sqrt{27}}, 3 - \frac{v}{\sqrt{27}}, 5 \cdot \frac{v}{\sqrt{27}}\right), \quad v \in [0, \sqrt{27}] \quad |\vec{r}'(v)| = 1}$$

Uočavamo da smo, baš kao i kod izračunavanja višestrukih integrala, i problem izračunavanja krivolinijskog integrala sveli na izračunavanje određenog integrala.

Uopštenje na slučaj skalarne funkcije tri promenljive i prostorne krive C je direktno: za funkciju $u = f(x, y, z)$ definisanu nad $D \subset \mathbb{R}^3$ i parametarski zadatu krivu $C : \vec{r}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$, gde $t \in [a, b] = I$, i sve tačke krive C pripadaju domenu D funkcije f, je

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

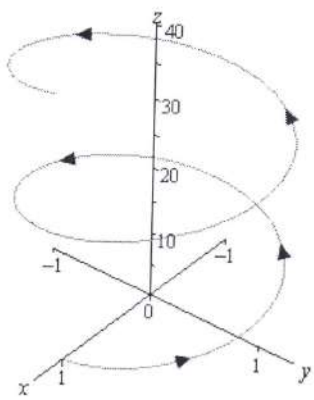
pri čemu je

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,.$$

17'

Primer 3.3. *Izračunati* $\int_C xyz\,\mathrm{d}s$, *ako je* $C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$, *za* $t \in [0, 4\pi]$. *Zatim izračunati dužinu krive* C.

Rešenje: Prostorna kriva C po kojoj integralimo je data u parametarskom obliku, što zadatak čini prilično lakim. Zadata kriva (heliks) je prikazana na Slici 33.



Slika 33: Kriva $C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ za $t \in [0, 4\pi]$, koja predstavlja domen integracije u Primeru 3.3

S obzirom da je

$$f(x(t), y(t), z(t)) = x(t)y(t)z(t) = 3t \sin t \cos t\,,$$

i da je

$$\mathrm{d}s = |\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t = |(-\sin t, \cos t, 3)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 9}\,\mathrm{d}t = \sqrt{10}\,\mathrm{d}t\,,$$

dobijamo da je

$$\int_C xyz\,\mathrm{d}s = \int_0^{4\pi} 3t \sin t \cos t \sqrt{10}\,\mathrm{d}t = \frac{3\sqrt{10}}{2}\int_0^{4\pi} t \sin 2t\,\mathrm{d}t = \frac{3\sqrt{10}}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{t}{2}\cos 2t\right)\Big|_0^{4\pi} = -3\sqrt{10}\pi.$$

Uočimo da je vrednost integrala negativna, i da je to u skladu sa činjenicom da je funkcija negativna nad posmatranom krivom, ili nad nekim njenim delovima.

Dalje izračunavamo dužinu posmatrane krive. Znamo da je to

$$\int_C \mathrm{d}s = \int_0^{4\pi} \sqrt{10}\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{10}\pi\,.$$

Uočimo da dužina krive ne može biti negativna.

Primer 3.4. *Izračunati* $\int_C y\,\mathrm{d}s$, *ako je* $C : y = 2\sqrt{x}$, *od* $x = 3$ *do* $x = 24$.

Rešenje: U ovom slučaju kriva je data u eksplicitnom obliku i potrebno je da je parametrizujemo. To možemo uraditi na više načina, a najjednostavnije je da za funkciju $y = f(x)$ posmatramo parametrizaciju $C : \vec{r}(t) = (t, f(t))$ odnosno parametarske jednačine $x = t, y = f(t)$, za $t \in [x_1, x_2] = [t_1, t_2]$.

Za ovakvu parametrizaciju izračunavamo element luka

$$\mathrm{d}s = |\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t = |(1, f'(t))|\,\mathrm{d}t = \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

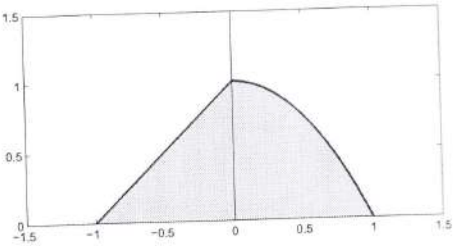
što nam je takođe poznat rezultat, iz priče o izračunavanju dužine luka eksplicitno zadate krive, i može se koristiti kao obrazac za element luka eksplicitno date krive.

Kako je u posmatranom primeru $C : \vec{r}(t) = (t, 2\sqrt{t})$, za $t \in [3, 24]$, i $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$, dobijamo

$$\int_C y\,\mathrm{d}s = \int_3^{24} 2\sqrt{t}\sqrt{1 + \frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^{24} \sqrt{t+1}\,\mathrm{d}t = 156\,.$$

Primer 3.5. *Izračunati* $\oint_C xy\ \mathrm{d}s$, *ako je* C *rub oblasti ograničene* x*-osom i graficima funkcija* $y = x + 1$ *za* $x \leq 0$ *i* $y = 1 - x^2$ *za* $x \geq 0$.

Rešenje: Oblast čiji rub predstavlja kriva C prikazana je na Slici 34.



Slika 34: Oblast G i njen rub C koji predstavlja domen integracije u Primeru 3.5.

Kriva C predstavlja uniju tri krive, pa ćemo iskoristiti jednu od osobina krivolinijskog integrala i traženi integral izračunati kao zbir tri krivolinijska integrala:

$$\oint_C xy\ \mathrm{d}s = \int_{C_1} xy\ \mathrm{d}s + \int_{C_2} xy\ \mathrm{d}s + \int_{C_3} xy\ \mathrm{d}s\,,$$

gde je C_1 deo prave $y = 0$ za $x \in [-1, 1]$; C_2 deo parabole $y = 1 - x^2$ za $x \in [0, 1]$ i C_3 deo prave $y = x + 1$ za $x \in [-1, 0]$.

Pre svega, potrebno je odrediti parametrizacije krivih C_1, C_2, C_3. Kako je reč o eksplicitno zadatim krivama, parametarske jednačine lako dobijamo

$$\begin{array}{llll}
C_1: & \vec{r}(t) = (t, 0), & t \in [-1, 1], & \vec{r}\,'(t) = (1, 0), & \mathrm{d}s = |\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+0}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\,. \\
C_2: & \vec{r}(t) = (t, 1 - t^2), & t \in [0, 1], & \vec{r}\,'(t) = (1, -2t), & \mathrm{d}s = |\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t\,. \\
C_3: & \vec{r}(t) = (t, t + 1), & t \in [-1, 0], & \vec{r}\,'(t) = (1, 1), & \mathrm{d}s = |\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+1}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t\,.
\end{array}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
\oint_C xy\ \mathrm{d}s &= \int_{C_1} xy\ \mathrm{d}s + \int_{C_2} xy\ \mathrm{d}s + \int_{C_3} xy\ \mathrm{d}s \\
&= \int_{-1}^{1} t \cdot 0\ \mathrm{d}t + \int_0^1 t(1 - t^2)\sqrt{1 + 4t^2}\ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} t(t+1)\,\sqrt{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ldots
\end{aligned}$$