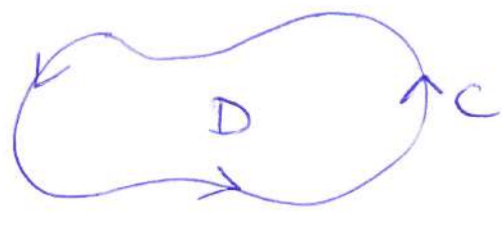
(*) TEOREMA GRINA (NASTAVAK...)



GRINOVA FORMULA

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

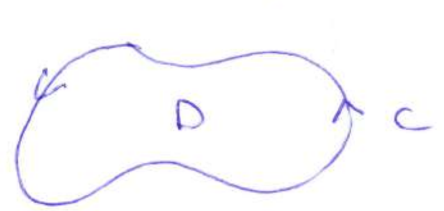
ILI

C JE POZ. ORIJ. I ZATVORENA RAVANSKA KRIVA

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

• VIŠESTRUKO POVEZANE OBLASTI U RAVNI:

a)



D JE JEDNOSTRUKO (PROSTO) POVEZANA OBLAST

D JE OGRANIČEN KONTUROM C

b)

D JE DVOSTRUKO POVEZANA OBLAST

D JE OGRANIČEN KONTURAMA C_1 I C_2

c)

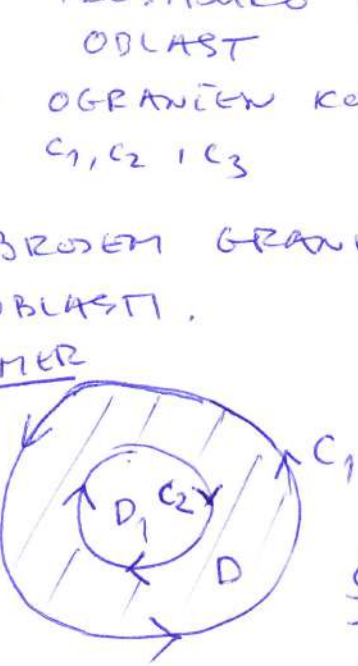
. . . . ITD ..

D JE TROSTRUKO POVEZANA OBLAST

D JE OGRANIČEN KONTURAMA C_1, C_2 I C_3

BROJEM GRANIČNIH KONTURA JE ODREĐENA VIŠESTRUKOST OBLASTI.

• PRIMER

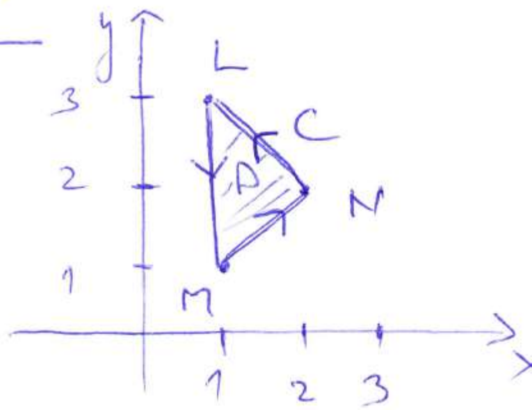


NEKA JE D DVOSTRUKO POVEZANA OBLAST OGR. KONTURAMA C_1 I C_2. TADA NA OSNOVU GRINOVE FORMULE IMAMO:

$$\oint_{-C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{D_1} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy \Rightarrow \oint_{C_1} \vec{F}\,d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

PRIMER Izračunati $\oint_C 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$, ako je C pozitivno orijentisan rub trougla D sa temenima M(1,1), N(2,2) i L(1,3). (P2)

Reš.



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

Ako rešavamo direktno:

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = \dots$$

Međutim, primenom Grinove formule, imamo

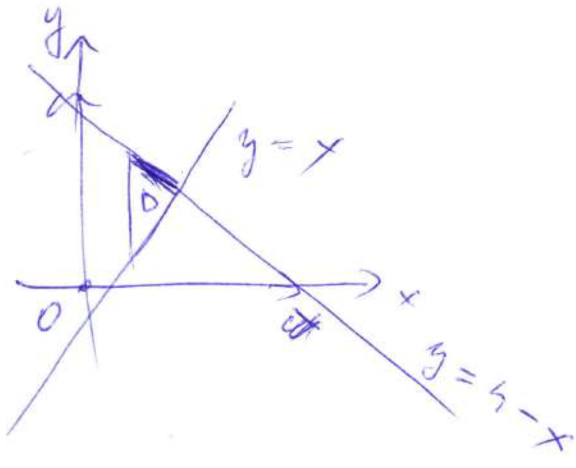
$$\oint_C \underbrace{2(x^2+y^2)}_{P}\,dx + \underbrace{(x+y)^2}_{Q}\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left(2(x+y) - 4y\right) dx\,dy = \iint_D 2(x-y)\,dx\,dy \overset{(*)}{=}$$

Granice oblasti D:

$1 \le x \le 2$

$x \le y \le 4-x$

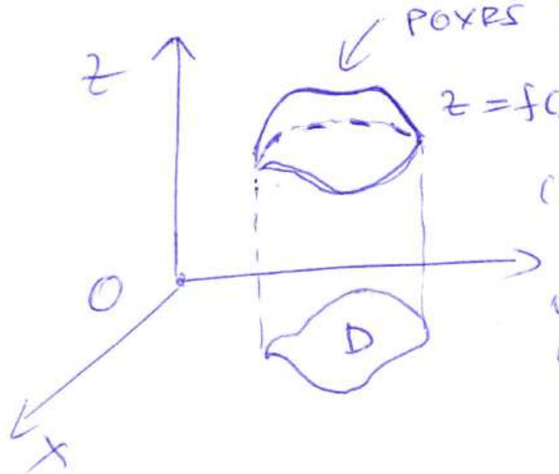


$$\overset{(*)}{=} \int_1^2 dx \int_x^{4-x} 2(x-y)\,dy = 2 \cdot \int_1^2 dx \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_x^{4-x} =$$

$$= 2 \cdot \int_1^2 dx \left[x(4-x) - \frac{(4-x)^2}{2} - x^2 + \frac{x^2}{2}\right] = \dots = -\frac{4}{3}$$

POVRŠINSKI INTEGRALI

(*) POVRŠ, PARAMETRIZACIJA POVRŠI



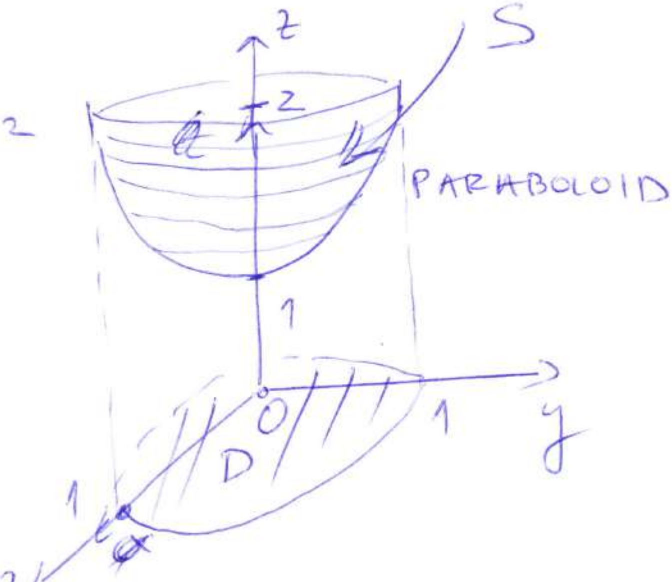
$$S=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D \wedge z=f(x,y)\}$$

NA PRIMER $\quad z=1+x^2+y^2$

$z=2 \Rightarrow 2=1+x^2+y^2$

$x^2+y^2=1^2$

$D:\ x^2+y^2\le 1$



$$S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,\ z=1+x^2+y^2\}$$

- POVRŠ OPISUJEMO POMOĆU VEKTORSKE FUNKCIJE OD DVE SKALARNE PROMENLJIVE, ODNOSNO POMOĆU PRESLIKAVANJA IZ $\mathbb{R}^2$ U SKUP $\mathbb{R}^3$. POVRŠ S ZAPISUJEMO NA SLEDEĆI NAČIN

$$S:\ \vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},$$

GDE $(u,v)\in G\subseteq \mathbb{R}^2$. VEKTORSKA FUNKCIJA $\vec{r}$ ODREĐUJE TAČKE NA POVRŠI S.

POD <u>PARAMETRIZACIJOM POVRŠI</u> PODRAZUMEVAMO ODREĐIVANJE VEKT. FUNK. $\vec{r}(u,v)$ I OBLAST G.

PRIMER PARAMETRIZOVATI SLEDEĆE POVRŠI

a) $z = f(x,y)\,,\quad (x,y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$

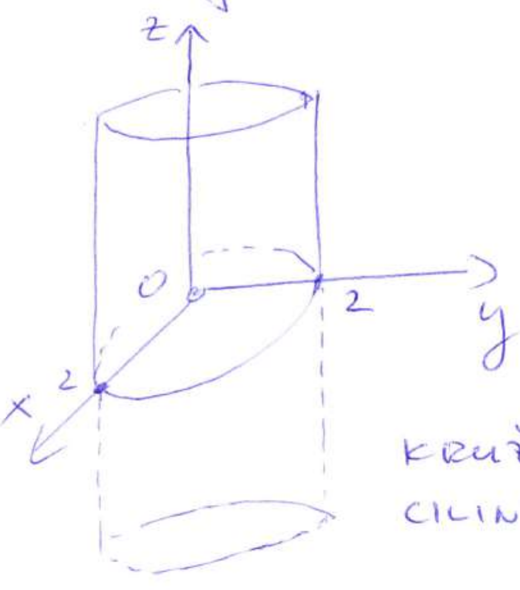
$$\vec{r}(u,v) = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + f(u,v)\,\vec{k} = (u, v, f(u,v)),$$

$$(u,v) \in G$$

b) $x = 3y^2 + 2z - 10 \qquad (y = u,\ z = v)$

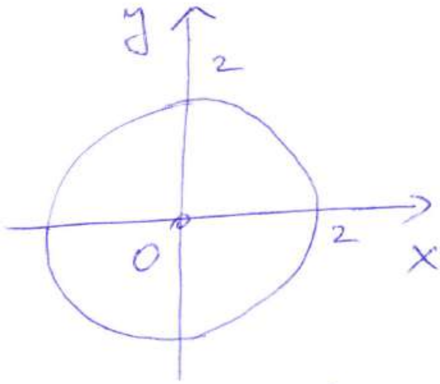
$$\vec{r}(u,v) = \left(3u^2 + 2v - 10,\ u,\ v\right), \quad (u,v) \in G$$

c) $x^2 + y^2 = 4 \quad (z \in \mathbb{R})$



$x^2 + y^2 = 2^2$

KRUŽNI CILINDAR



$x = 2\cos u$

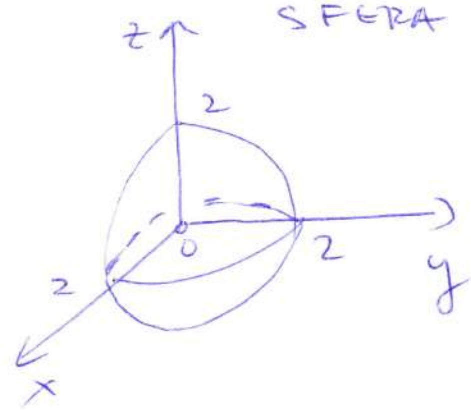
$y = 2\sin u$

$0 \le u \le 2\pi$

$$S:\ \vec{r}(u,v) = \left(2\cos u,\ 2\sin u,\ v\right), \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in \mathbb{R}$$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

SFERA



SFERNE KOORDINATE:

$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad \phi \in [0, \pi]$

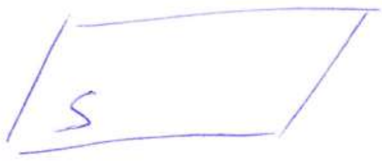
$z = \rho \cos\phi \qquad \rho \ge 0$

$$S:\ \vec{r}(u,v) = (2\sin u \cos v,\ 2\sin u \sin v,\ 2\cos u)$$

$$u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi]$$

e) $2x - y + z = 2$ $\quad z = 2 - 2x + y$ (P5)

RAVAN



$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 2 - 2x + y)$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$S : \vec{r}(u, v) = (u, v, 2 - 2u + v), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

(*) ELEMENT POVRŠI (DIFERENCIJAL POVRŠI)

POSM. POVRŠ S, $\quad S : \vec{r}(u, v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
$(u, v) \in G$.

ZA MALE PROMENE PARAMETARA u I v:

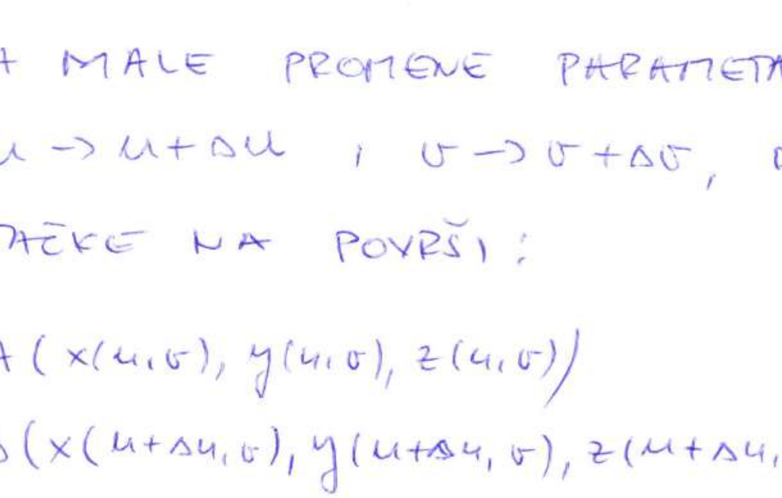
$u \to u + \Delta u$ I $v \to v + \Delta v$, DOBIĆEMO SLEDEĆE TAČKE NA POVRŠI:

$A(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$B(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v), z(u+\Delta u, v))$

$D(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v), z(u, v+\Delta v))$

$C(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v), z(u+\Delta u, v+\Delta v))$



PRIMETIMO DA FIKSIRANJEM JEDNOG PARAMETRA ($v = \text{const}$ ILI $u = \text{const}$) DOBIJAMO KRIVE NA POVRŠI S.

1) $\vec{r}(u, \underset{\text{const}}{v}) = \vec{r}_1(u)$ $\quad (\widehat{AB})$

2) $\vec{r}(u, \underset{\text{const}}{v + \Delta v}) = \vec{r}_2(u)$ $\quad (\widehat{DC})$

3) $\vec{r}(\underset{\text{const}}{u}, v) = \vec{r}_3(v)$ $\quad (\widehat{AD})$

4) $\vec{r}(\underset{\text{const}}{u + \Delta u}, v) = \vec{r}_4(v)$ $\quad (\widehat{BC})$

TAČKE A, B, C I D OBRAZUJU TEMENA KRIVOLINIJSKOG ČETVOROUGLA ABCD. ODREDIĆEMO POVRŠINU ΔS OVAKO DOBIJENOG ČETVOROUGLA. APROKSIMIRAĆEMO ABCD SA ODGOVARAJUĆIM PARALELOGRAMOM. POVRŠINU PARALELOGRAMA ZNAMO DA IZRAČUNAMO. STRANICE PARALELOGRAMA SU ODREĐENE VEKTORIMA $\vec{AB}$ I $\vec{AD}$:

P6

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \Big(x(u+\Delta u, v) - x(u,v),\ y(u+\Delta u, v) - y(u,v),\ z(u+\Delta u, v) - z(u,v)\Big)$$

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \Big(x(u, v+\Delta v) - x(u,v),\ y(u, v+\Delta v), - y(u,v),\ z(u, v+\Delta v) - z(u,v)\Big),$$

ODNOSNO, UZIMAJUĆI U OBZIR APROKSIMACIJE TIPA

$$x(u, v+\Delta v) - x(u v) = \frac{x(u, v+\Delta v) - x(u,v)}{\Delta v} \cdot \Delta v \approx x'_v \cdot \Delta v \text{ I}$$

$x(u+\Delta u, v) - x(u,v) \approx x'_u \cdot \Delta u$, DOBIJAMO SLEDEĆE

$$\vec{AB} \approx (x'_u \Delta u,\ y'_u \Delta u,\ z'_u \Delta u) = \vec{r}\,'_u(u,v) \cdot \Delta u \text{ I}$$

$$\vec{AD} \approx (x'_v, \Delta v,\ y'_v \Delta v,\ z'_v \Delta v) = \vec{r}\,'_v(u,v)\, \Delta v,$$

GDE JE $\vec{r}\,'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$ I $\vec{r}\,'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$.

POVRŠINA PARALELOGRAMA ABCD JE JEDNAKA INTENZITETU VEKTORSKOG PROIZVODA VEKTORA $\vec{AB}$ I $\vec{AD}$:

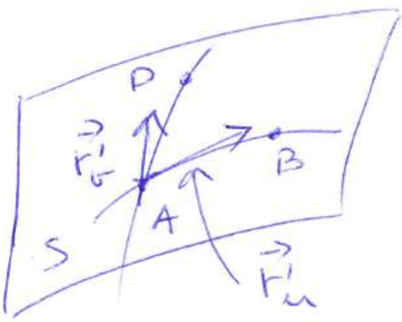
$$\Delta S \approx |\vec{AB} \times \vec{AD}| = |\vec{r}\,'_u \Delta u \times \vec{r}\,'_v \Delta v| = \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}\right| \Delta u \Delta v$$

U GRANIČNOM PROCESU KADA
$\Delta u \to 0$ I $\Delta v \to 0$,

APROKSIMACIJA KRIVOLINIJSKOG ČETVOROUGLA (SEGMENTA POVRŠI S) OPISANIM PARALELOGRAMOM POSTAJE TAČNA. TADA PIŠEMO $\Delta S = \boxed{dS = |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, du\, dv}$,

KAŽEMO DA JE dS ELEMENT POVRŠI (DIFERENCIJAL POVRŠI).

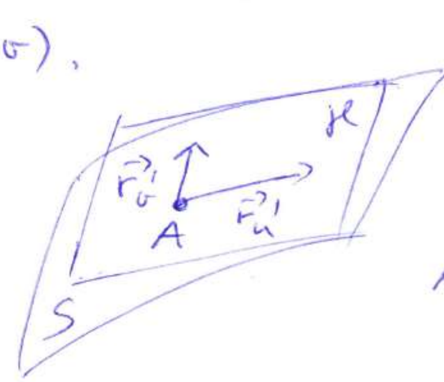
U OVOM GRANIČNOM SLUČAJU ($\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$) VEKTORI $\vec{AB}$ I $\vec{AD}$ POSTAJU TANGENTNI VEKTORI NA POVRŠ U TAČKI A.



$\vec{AB} = \vec{r}_u' \Delta u$
$\vec{AD} = \vec{r}_v' \cdot \Delta v$

DAKLE, $\vec{r}_u'$ I $\vec{r}_v'$ SU TANGENTNI VEKTORI U TAČKI A.

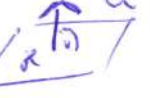
VEKTORI $\vec{r}_u'$ I $\vec{r}_v'$ SU TANGENTNI VEKTORI NA POVRŠ S U POSMATRANOJ TAČKI (u, v). RAVAN ODREĐENA OVIM VEKTORIMA JE TANGENTNA RAVAN NA POVRŠ S U TAČKI (u, v).



μ - TANGENTNA RAVAN

$A = \vec{r}(u, v)$

VEKTOR $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$ JE VEKTOR NORMALE NA TANGENTNU RAVAN, ODNOSNO VEKTOR NORMALE NA POVRŠ S.



$$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|}}$$ JEDINIČNI VEKTOR NORMALE

PP

- U SPECIJALNOM SLUČAJU, KADA JE POVRŠ S ZADATA U EKSPLICITNOM OBLIKU $z=f(x,y)$, ODREDIMO dS, $\vec{n}$.

PA $S: \vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$, $(x,y)\in G$

$$\vec{r}(u,v)=(u,v,f(u,v)),\quad (u,v)\in G$$

$$\vec{r}'_u=(1,0,f'_u),\quad \vec{r}'_v=(0,1,f'_v)$$

$$\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & f'_u\\ 0 & 1 & f'_v\end{vmatrix}=\vec{i}(0-f'_u)-\vec{j}(f'_v-0)+\vec{k}(1-0)=$$

$$=(-f'_u,-f'_v,1)$$

$$|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|=\sqrt{1+f'^2_u+f'^2_v}$$

$$dS=|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|\,du\,dv=\sqrt{1+f'^2_u+f'^2_v}\,du\,dv,\text{ ODNOSNO}$$

$$dS=\sqrt{1+f'^2_x+f'_y}\,dx\,dy$$

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|}=\frac{(-f'_u,-f'_v,1)}{\sqrt{1+f'^2_u+f'^2_v}}\text{ ILI }=\frac{(-f'_x,-f'_y,1)}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}$$

(*) POVRŠINSKI INTEGRAL SKALARNOG POLJA

$$S:\ \vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$$

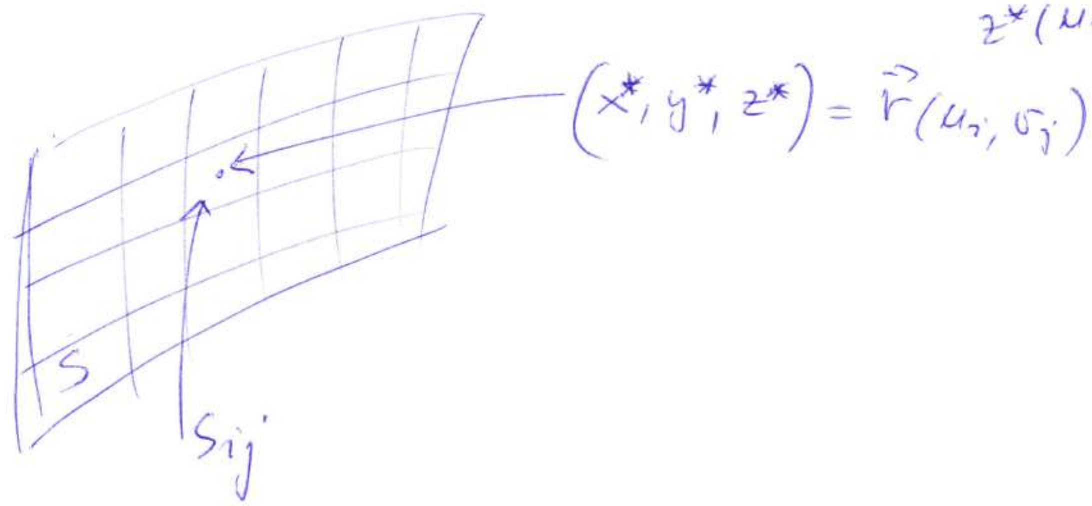
DOMEN INTEGRACIJE S, NA SLIČAN NAČIN KAO U SLUČAJU OSTALIH VIŠESTRUKIH INTEGRALA, DOMEN INTEGRACIJE, POVRŠ S SE PRVO PODELI NA PODSEGMENTE S_{ij}

$i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m$

NA SVAKOM - PODSEGMENTU S_{ij} P5

SE IZABERE JEDNA TAČKA $\vec{r}(u_i, v_j) = (x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j))$.

~~PRIM~~:



DEF. POVRŠINSKI INTEGRAL SKALARNOG POLJA $f(x,y,z)$ NAD POVRŠI S JE GRANIČNA VREDNOST INTEGRALNE SUME

$$\lim_{\Delta S_{ij} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x^*(u_i,v_j), y^*(u_i,v_j), z^*(u_i,v_j)) \cdot \Delta S_{ij} =$$

$$= \iint_S f(x,y,z)\, dS .$$

INTERPRETACIJA: AKO JE $f(x,y,z)$ POVRŠINSKA GUSTINA MASE RASPOREĐENE PO POVRŠI S $\left(f = \frac{m}{\Delta S_{ij}}\right)$,

ONDA JE UKUPNA MASA RASPOREĐENA PO POVRŠI S:

$$M = \iint_S f(x,y,z)\, dS .$$

$$f = \frac{m_i}{dS} \to \iint_S \frac{m_i}{dS}\, dS = \iint_S m_i = M$$

(P10)

- OSOBINE POV. INT. SKALARNOG POLJA

1) $\iint_S 1 \cdot dS = POV(S) \leftarrow$ POVRŠINA POVRŠI

2) NAZIVA SE JOŠ I KAO POV. INT. PRVE VRSTE

3) NE ZAVISI OD PARAMETRIZACIJE NITI OD ORIJENTACIJE POVRŠI.

4) IMA SVE OSOBINE ANALOGNE OSOBINAMA PO SADA RAZMATRANIH INTEGRALA.

- IZRAČUNAVANJE POV. INT. SKALARNOG POLJA

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_G f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\,du\,dv$$

$$S : \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in G.$$