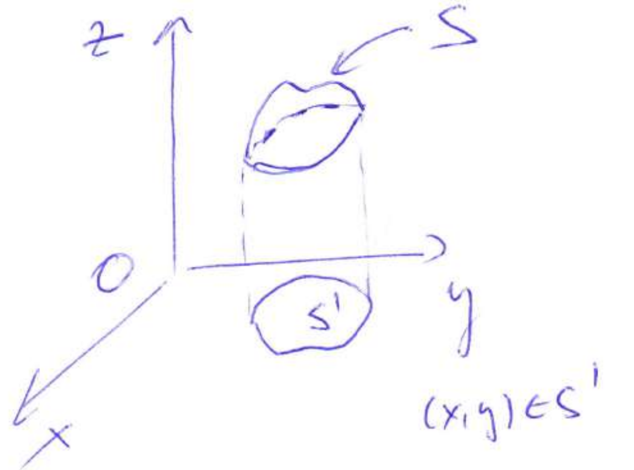
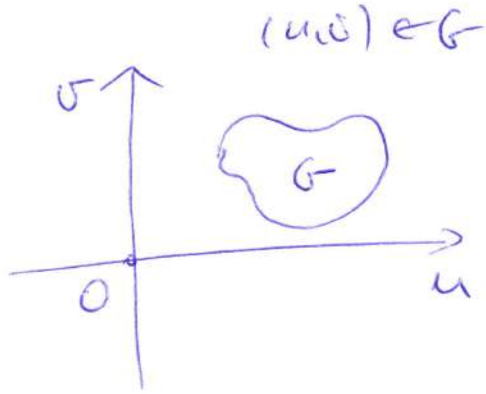
(*) POVRŠINSKI INTEGRAL SKALARNOG POLJA

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_G f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\cdot du\,dv$$

$$S: \vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$$

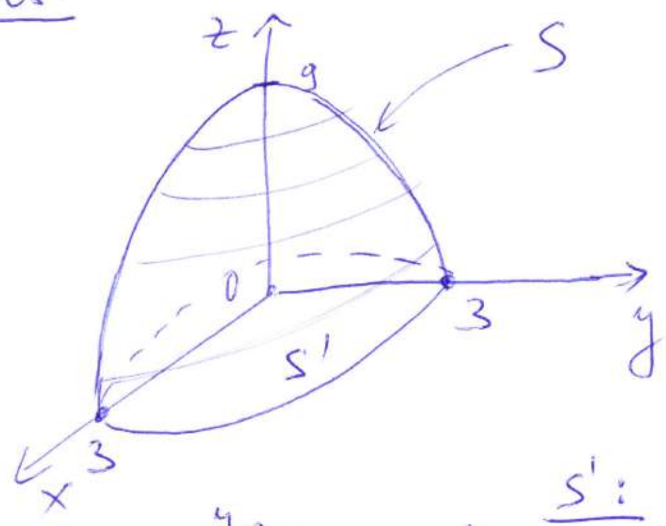
$$(u,v) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$$





<u>PRIMER</u> IZRAČUNATI POVRŠINU DELA PARABOLOIDA $z = 9 - x^2 - y^2$ IZNAD xy-RAVNI.

<u>REŠ.</u>

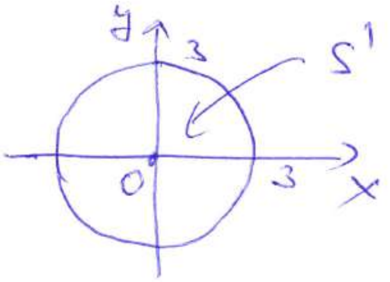


$$\Delta S = \iint_S dS$$

$$9 - x^2 - y^2 = 0 \quad (z=0)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$



S':

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le r \le 3$

$$z = 9 - x^2 - y^2 = 9 - r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 9 - r^2$$

$$\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 9 - r^2)$$

(P2)

$$S: \vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 9-r^2) \qquad (u=r, \ v=\theta)$$

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 3$$

$$\vec{r}'_r = (\cos\theta, \sin\theta, -2r), \quad \vec{r}'_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\vec{r}'_r \times \vec{r}'_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(+2r^2\cos\theta) - \vec{j}\,(0+2r^2\sin\theta) + \vec{k}\,(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)$$

$$\vec{r}'_r \times \vec{r}'_\theta = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r)$$

$$|\vec{r}'_r \times \vec{r}'_\theta| = \sqrt{4r^4(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) + r^2} = r\sqrt{1+4r^2}$$

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,dr = 2\pi \int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,dr =$$

$$dS = r\sqrt{1+4r^2}\,d\theta\,dr$$

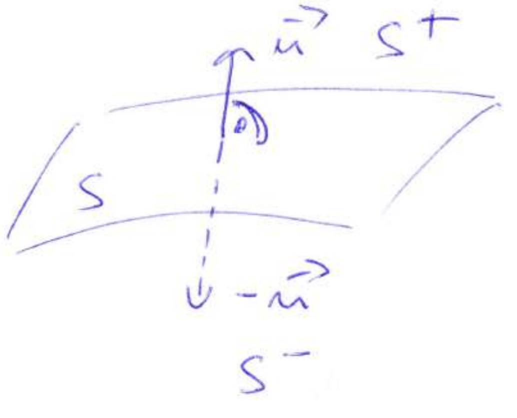
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{6}\left((4\cdot 3^2+1)^{3/2} - 1\right) =$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)}$$

* POVRŠINSKI INTEGRAL VEKTORSKOG POLJA (POV. INT. DRUGE VRSTE)

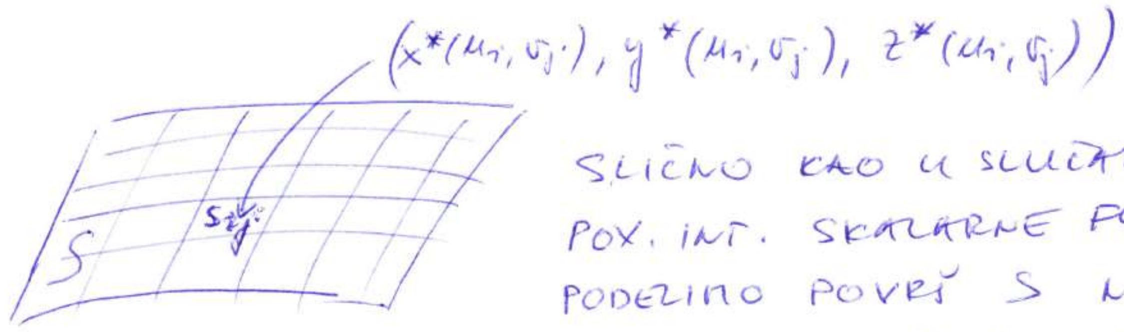
POSMATRAJMO ORIJENTISANU POVRŠ:

$$S: \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$
$$(u,v) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$$



SMER VEKTORA $\vec{n}$ ODREĐUJE ORIJENTACIJU POVRŠI S

NEKA JE $\vec{F} = (P, Q, R)$ VEKTORSKO POLJE.



SLIČNO KAO U SLUČAJU POV. INT. SKALARNE FUNKCIJE, PODELIMO POVRŠ S NA ~~PO~~ SEGMENTE S_{ij} I BIRAMO JEDNU TAČKU (x^*, y^*, z^*) IZ SVAKOG SEGMENTA.

$i = 1, 2, \ldots, n$
$j = 1, 2, \ldots, m$

NEKA JE $\vec{n}$ JEDINIČNI VEKTOR NORMALE NA POVRŠ S U TAČKI $\vec{r}(u_i, v_j) = (x^*, y^*, z^*)$.

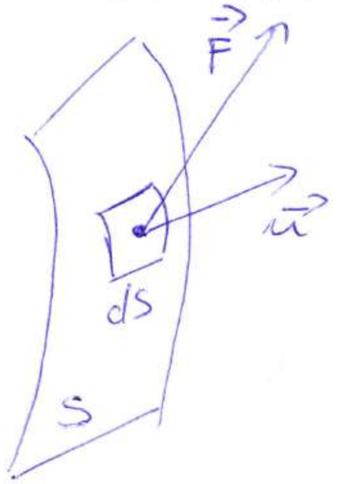
DEF. POVRŠINSKI INTEGRAL VEKTORSKOG POLJA $\vec{F}$ PO POVRŠI S SE DEFINIŠE KAO GRANIČNA VREDNOST INTEGRALNE SUME

$$\lim_{\Delta S_{ij} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \vec{F}(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j)) \cdot \vec{n} \cdot dS =$$

$$= \iint_S \vec{F}(x, y, z)\,\vec{n}\,dS = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

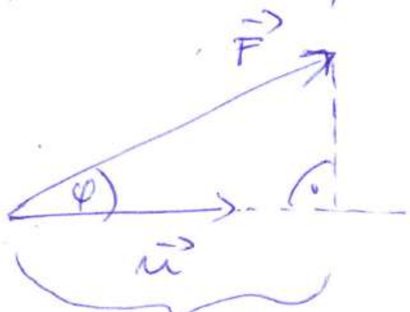
• INTERPRETACIJA POV. INT. VEKTORSKOG POLJA

POSMATRAJMO PROTOK NEKOG FLUIDA KROZ POVRŠ (MEMBRANU) S. NEKA $\vec{F}$ DEFINIŠE PROTOK U SVAKOJ TAČKI, TJ. $\vec{F}$ PREDSTAVLJA BRZINU ČESTICA FLUIDA KROZ POVRŠ S.



$$\vec{F}\cdot\vec{u} = |\vec{F}|\cdot\overset{=1}{|\vec{u}|}\cdot\cos\varphi = |\vec{F}|\cdot\cos\varphi$$

$$-1 \le \cos\varphi \le 1, \quad \varphi\in[0,\pi]$$



$\mathrm{Proj}_{\vec{u}}\vec{F}$ $\qquad \cos\varphi = \dfrac{\mathrm{Proj}_{\vec{u}}\vec{F}}{|\vec{F}|}$

$$\vec{F}\cdot\vec{u} = |\vec{F}|\cdot\cos\varphi = \cancel{|\vec{F}|}\cdot\frac{\mathrm{Proj}_{\vec{u}}\vec{F}}{\cancel{|\vec{F}|}} = \mathrm{Proj}_{\vec{u}}\vec{F}$$

$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{u}\cdot dS \quad \to \quad \vec{F}\cdot\vec{u}\, dS$ JE PROTOK (FLUKS) POLJA $\vec{F}$ KROZ SEGMENT dS.

$\vec{F}\cdot\vec{u}$ JE INTENZITET PROTOKA POLJA KROZ SEGMENT dS, ODNOSNO U OKOLINI POSMATRANE TAČKE. SPECIJALNO,

AKO JE $\varphi = 0 \Rightarrow$ PROTOK JE MAKSIMALAN,

AKO JE $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ PROTOK JE NULA,

A AKO JE $\varphi = \pi \Rightarrow$ PROTOK JE NEGATIVAN (TEČE U SUPROTNOM SMERU).

ZAKLJUČUJEMO DA ~~je~~ POV. INT. VEKT. POLJA

$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{u}\, dS$ PREDSTAVLJA MERU PROTOKA (FLUKS) VEKT. POLJA $\vec{F}$ KROZ POVRŠ S

- POV. INT. VEKTORSKOG POLJA IMA ISTE OSNOVNE OSOBINE KAO I DO SADA RAZMATRANI TIPOVI INTEGRALA.

- VAŽNO JE UOČITI, DA POV. INT. VEKT. POLJA ZAVISI OD ORIJENTACIJE POVRŠI.

(*) IZRAČUNAVANJE POVRŠINSKOG INTEGRALA VEKTORSKOG POLJA

$$\iint\limits_S \vec{F}(x,y,z)\, \underbrace{\vec{n}\cdot dS}_{d\vec{S}} = \iint\limits_G \vec{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \vec{n} \cdot \underbrace{\;\,dudv}_{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} ,$$

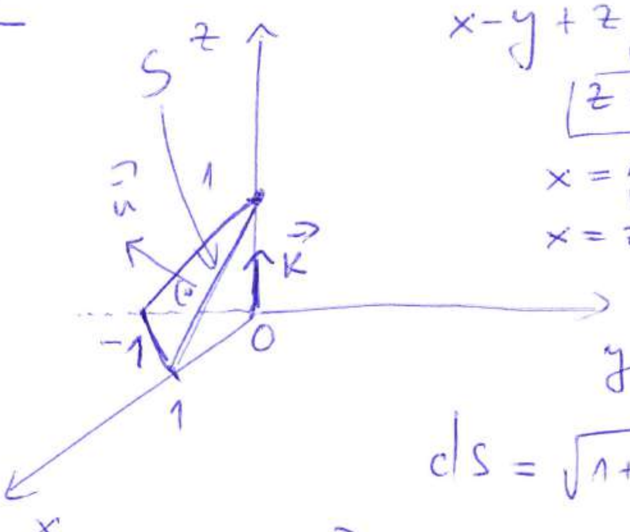
GDE JE $S:\ \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v)\in G \subseteq \mathbb{R}^2$

I $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$.

$dS = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\, dudv$

PRIMER IZRAČUNATI $\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, AKO JE $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, A POVRŠ S GORNJA STRANA DELA RAVNI $x-y+z=1$ ODSEČENOG KOORDINATNIM OSAMA.

REŠ.



$x - y + z = 1 \rightsquigarrow \vec{n}_S = (1,-1,1)$

$\Downarrow$

$\boxed{z = 1 - x + y}$

$\vec{n} = \dfrac{(1,-1,1)}{|(1,-1,1)|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

$x = y = 0 \Rightarrow z = 1$

$x = z = 0 \Rightarrow y = -1$

$y = z = 0 \Rightarrow x = 1$

$\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

$dS = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dxdy = \sqrt{\cancel{1+1+1}\,3}\, dxdy = \sqrt{3}\, dxdy$

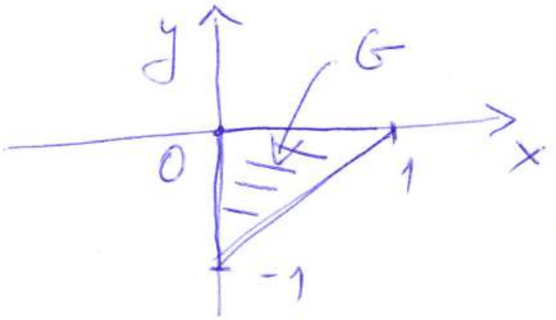
$\vec{n}\cdot\vec{k} = (1,-1,1)\cdot(0,0,1) = 1 > 0 \Rightarrow \cos\varphi > 0$

$\vec{n} \nwarrow \uparrow \vec{k}$ $\quad \varphi = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{k}) \quad \Downarrow \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

φ JE OŠTAR UGAO, PA $\vec{n}$ ODREĐUJE GORNJU STRANU POVRŠI S. P6

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS =$$

$$S: \ \vec{r}(x,y) = (x, y, 1-x+y)$$



G:

$$0 \le x \le 1$$

$$x-1 \le y \le 0$$

$$= \iint_G (x, y, 1-x+y) \cdot \overbrace{\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}(1,-1,1)}^{\vec{n}} \cdot \underbrace{\cancel{\sqrt{3}} \cdot dx\,dy}_{dS} =$$

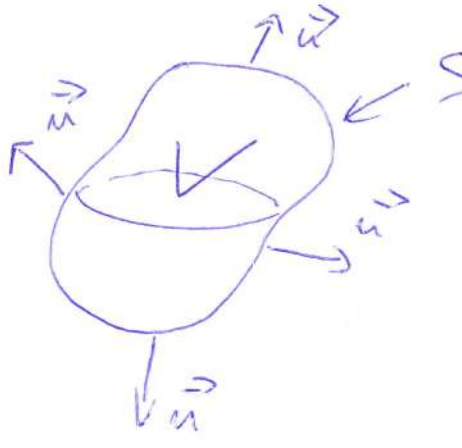
$$= \iint_G (\cancel{x} - \cancel{y} + 1 - \cancel{x} + \cancel{y}) \cdot dx\,dy = \iint_G dx\,dy = \Delta G =$$

$$= \frac{1}{2}$$

(*) TEOREMA OSTROGRADSKOG-GAUSA (TEOREMA O DIVERGENCIJI)

P7

- POSMATRAJMO ZATVORENU, GLATKU I POZITIVNO ORIJENTISANU POVRŠ S. NORMALA POVRŠI S JE USMERENA KA SPOLJAŠNOSTI. NEKA JE UNUTRAŠNJOST POVRŠI S OBELEŽENA SA $V \subseteq \mathbb{R}^3$.



NEKA JE $\vec{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$ VEKTORSKO POLJE KOJE JE DEFINISANO I DIFERENCIJABILNO U SVIM TAČKAMA SKUPOVA S I V.

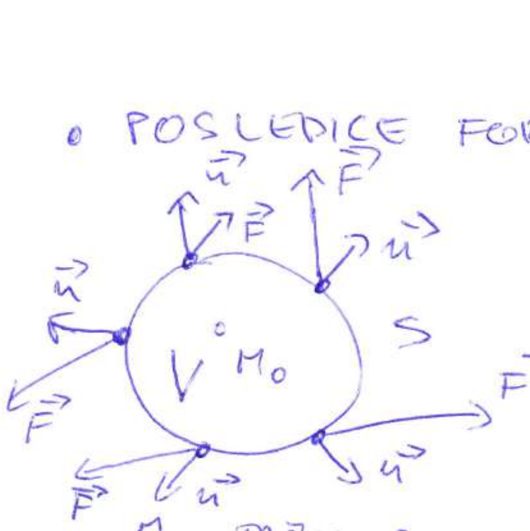
TADA VAŽI FORMULA OSTROGRADSKOG-GAUSA:

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})\, dV}$$

ILI

$$\iint_S (P,Q,R)\,\vec{n}\cdot dS = \iiint_V \underbrace{\left(P'_x + Q'_y + R'_z\right)}_{\operatorname{div}\vec{F}} dx\,dy\,dz.$$

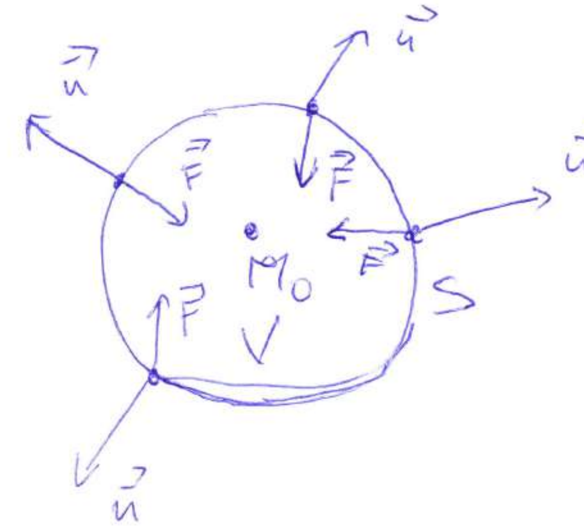
- POSLEDICE FORMULE O-G:



- AKO JE $\operatorname{div}\vec{F}(M_0)>0 \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV>0$
$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}>0 \Rightarrow$ PROTOK POZITIVAN
$\Downarrow$
M_0 JE TAČKA IZVORA POLJA $\vec{F}$

M_0 - TAČKA PROSTORA
S - MALA SFERA (OKOLINA) OKO TAČKE M_0

– AKO JE $\operatorname{div} \vec{F}(M_0) < 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \iint\limits_S \vec{F}\, d\vec{S} < 0 \Rightarrow$ (PP)



$\Rightarrow$ PROTOK NEGATIVAN

$\Downarrow$

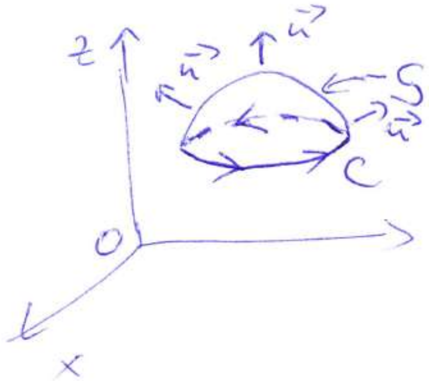
M_0 JE TAČKA PONORA V. POLJA $\vec{F}$

- JOŠ JEDNA INTERPRETACIJA FORMULE G–O:

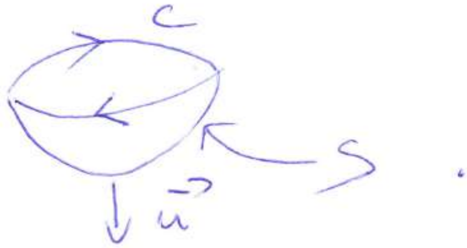
UKUPAN PROTOK VEKTORSKOG POLJA (FLUIDA) KROZ RUBNU POVRŠ POSMATRANE OBLASTI JEDNAK JE UKUPNOJ KOLICINI FLUIDA ~~KOJI~~ „IZVIRE" UNUTAR TE OBLASTI.

(*) TEOREMA STOKSA

- POSMATRAJMO PROSTORNU POVRŠ S, KOJA JE GLATKA, ILI PO DELOVIMA GLATKA, I KOJA JE OGRANIČENA ZATVORENOM KRIVOM C. POVRŠ S I KRIVA C SU SAGLASNO ORIJENTISANE, VIDETI SLIKE:



ILI



POD SAGLASNIM ORIJENTACIJAMA KRIVE I POVRŠI PODRAZUMEVAMO DA, UKOLIKO ŠAKU DESNE RUKE POSTAVIMO TAKO DA PALAC BUDE USMEREN KAO NORMALA NA POVRŠ,

PRED UVEK POKAZUJU SAGLASAN SMER KRETANJA DUŽ KRIVE.

NEKA JE VEKTORSKO POLJE $\vec{F}=(P,Q,R)$

DEFINISANO I DIFERENCIJABILNO NAD SUC.

TADA VAŽI FORMULA STOKSA:

$$\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}.}$$

- POSLEDICE FORMULE STOKSA

— AKO JE $\operatorname{rot}\vec{F}=0$, TADA JE $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\,d\vec{S}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$, TJ. CIRKULACIJA JE NULA ZA SVAKU ZATVORENU KRIVU.

— FORMULA GRINA JE SPECIJALAN SLUČAJ FORMULE STOKSA KADA JE $z=0$, TJ. S JE RAVANSKA POVRŠ.