

MATRICE I DETERMINANTE

Za određivanje broja rešenja sistema linearnih jednačina, kao i za samo izračunavanje tih rešenja ako postoje, dovoljno je poznavati koeficijente sistema i slobodne članove.

Posmatranje ovih veličina zapisanih u obliku **pravougaone šeme brojeva** zahteva uvođenje dva nova pojma - pojma matrice i pojma determinante.

Definicija matrice i osnovni pojmovi

Matrica je pravougaona šema brojeva i te brojeve zovemo **elementi matrice**, horizontalne redove **vrste**, a vertikalne **kolone**.

Broj vrsta i kolona određuje **format matrice** - za matricu koja ima m vrsta i n kolona kažemo da je formata $m \times n$. Ako element i -te vrste i j -te kolone označimo sa a_{ij} , onda je matrica A sa elementima a_{ij} data sa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ili kraće $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, tj. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Izdvajamo:

- **nula matrica** - matrica čiji su svi elementi jednaki nuli

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

oznaka je 0

- **matrica kolona** je matrica formata $m \times 1$, $m \in \mathbb{N}$, tj. svaka matrica koja ima samo jednu kolonu

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots$$

- **matrica vrsta** je matrica formata $1 \times n$, $n \in \mathbb{N}$, tj. svaka matrica koja ima samo jednu vrstu

$$[1 \ 2 \ 3], \quad [-1 \ 0], \quad [15 \ -3 \ 4 \ 50], \dots$$

- **kvadratna matrica** je matrica koja ima jednak broj vrsta i kolona, tj. $m = n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 2 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 13 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 16 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \dots$$

Kod kvadratne matrice elementi a_{ii} , $i = 1, \dots, n$ čine **glavnu dijagonalu**, dok **sporednu dijagonalu** čine elementi koji se nalaze na dijagonali koja spaja desni gornji ugao sa levim donjim uglom.

- **jedinična matrica** je *kvadratna matrica* kod koje su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1, a svi elementi van glavne dijagonale jednaki 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

oznaka je I ili E , a kada želimo da naglasimo format jedinične matrice, onda I_2, I_3, \dots

Jednakost matrica

Dve **matrice su jednake** ako i samo ako imaju **isti format** i ako su im **odgovarajući elementi jednaki**.

Osnovne operacije sa matricama

Osnovne operacije sa matricama su:

- sabiranje matrica
- množenje matrice realnim brojem
- množenje matrica.

Sabiranje matrica

Sabirati se mogu samo matrice **istog formata**. Sabiranjem dve matrice formata $m \times n$ dobija se matrica formata $m \times n$ čiji **elemetni su jednaki zbiru odgovarajućih elemenata matrica koje se sabiraju**.

Dakle, ako treba sabrati matrice

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{i} \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}, \quad \text{onda je} \quad A + B = C,$$

$$\text{gde je} \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Množenje matrice realnim brojem

Matrica se množi realnim brojem α tako što se **svaki element matrice pomnoži tim brojem**.

Dakle, ako je

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{i} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{onda je} \quad \alpha A = C$$

$$\text{gde je} \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Množenjem matrice A brojem -1 dobija se **suprotna matrica** $-A$.

Oduzimanje matrica, $A - B$, je sabiranje matrice A i matrice $-B$ koja je suprotna matrici B .

Primer: Odrediti matricu A za koju je $2A - 4I = B$ gde je $B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Množenje matrica

Proizvod matrica postoji samo ako je **broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge matrice**, tj. ako je broj elemenata u vrsti prve matrice jednak broju elemenata u koloni druge matrice.

Elementi matrice $C_{m \times n} = A_{m \times r} \cdot B_{r \times n}$ se dobijaju skalarnim množenjem odgovarajuće vrste matrice A i kolone matrice B . **Skalarni proizvod** vrste matrice A i kolone matrice B je broj koji se dobija množenjem odgovarajućih elemenata i sabiranjem dobijenih proizvoda. Skalarni proizvod i -te vrste i j -te kolone je broj

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}.$$

Dakle, ako je

$$A = [a_{ij}]_{m \times r} \quad \text{i} \quad B = [b_{ij}]_{r \times n}, \quad \text{onda je} \quad A \cdot B = C,$$

$$\text{gde je} \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj},$$
$$i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Primer: Odrediti $A \cdot B$ za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrica u opštem slučaju nije komutativna operacija! Može se pokazati da je množenje matrica asocijativno i da važi distributivnost u odnosu na operaciju sabiranja matrica, tj.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B).$$

Primer: Za matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ odrediti $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$ i $C \cdot A$.

Za jediničnu matricu važi

$$A_{m \times n} I_n = I_m A_{m \times n} = A_{m \times n}.$$

Dakle, množenje sa jediničnom matricom ne menja polaznu matricu.

Stepenovanje matrica

Stepenovanje matrice prirodnim brojem se definiše samo za kvadratne matrice:

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^n = A^{n-1} \cdot A, \quad n = 2, 3, \dots$$

Primer: Odrediti A^5 za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Svakom sistemu linearnih jednačina odgovara **matrica sistema** koju čine koeficijenti sistema. Slobodnim članovima odgovara **matrica kolona slobodnih članova**, a nepoznatima odgovara **matrica kolona nepoznatih**.

Primer: Sistemu linearnih jednačina
$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 3 \\ x - y & = & 0 \\ 2x + y & = & 3 \end{array}$$
 odgovara matrični

zapis $A \cdot X = B$ gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Determinante

Determinanta je vrednost koja se, na određeni način, pridružuje **kvadratnoj** matrici ili opštije, bilo kojoj kvadratnoj šemi brojeva.

Determinantu koja odgovara matrici A označavamo sa $\det(A)$ ili $|A|$.

Determinanta reda 2, koja odgovara matrici formata 2×2 , se sastoji od četiri elementa i zapisuje se u obliku

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Njena vrednost se računa tako što se od proizvoda elemenata na glavnoj dijagonali oduzme proizvod elemenata na sporednoj dijagonali, tj.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Primer: Izračunati determinantu koja odgovara matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Determinanta reda 3 koja odgovara matrici formata 3×3 je određena sa 9 elemenata i zapisuje se u obliku

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ako izostavimo vrstu i kolonu u kojoj se nalazi jedan element determinante (odnosno kvadratne matrice), preostali elementi će određivati determinantu nižeg reda koju nazivamo **minor** posmatranog elementa.

Ako se ovaj minor pomnoži sa $(-1)^{i+j}$, gde je i redni broj vrste, a j redni broj kolone posmatranog elementa, dobijamo **kofaktor** posmatranog elementa.

Na primer, minor elementa c_2 je

$$C_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_3 - b_1 a_3,$$

a kofaktor

$$\tilde{C}_2 = (-1)^{2+3} C_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1 b_3 - b_1 a_3).$$

Izračunavanje vrednosti determinante reda 3 se može svesti na računanje vrednosti određenih determinanti reda 2 razvijanjem determinante po nekoj od vrsta ili kolona.

Determinanta se razvija po elementima neke vrste (kolone)

tako što se svaki elemenat posmatrane vrste (kolone) pomnoži odgovarajućim kofaktorom i dobijene vrednosti saberu.

Može se pokazati da razvoj po bilo kojoj vrsti ili koloni uvek daje isti rezultat koji predstavlja vrednost determinante.

Razvoj determinante reda 3 **po elementima prve vrste** je

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2 c_3 - c_2 b_3) - b_1(a_2 c_3 - c_2 a_3) + c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) \\ &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3. \end{aligned}$$

Razvoj determinante reda 3 **po elementima druge kolone** je

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + b_2(a_1c_3 - c_1a_3) - b_3(a_1c_2 - c_1a_2) \\ &= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3. \end{aligned}$$

Formula za izračunavanje vrednosti determinante reda 3 se zove **Sarusovo pravilo**:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3.$$

Primer: Izračunati vrednost determinante koja odgovara matrici $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 9 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Primer: Izračunati vrednost determinante koja odgovara matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Osobine determinanti

Osobine determinanti ćemo pokazati na determinanti reda 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

1. Determinanta ne menja vrednost ako vrste i kolone zamene ulogu.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

2. Ako dve vrste (kolone) zamene mesta, vrednost determinante menja znak.

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - b_1a_2).$$

3. Determinanta se množi brojem tako što se svi elementi **jedne** vrste (kolone) pomnože tim brojem.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda a_1b_2 - \lambda b_1a_2 = \lambda(a_1b_2 - b_1a_2) = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

4. Determinanta ne menja vrednost ako se elementi jedna vrste (kolone) dodaju odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone) prethodno pomnožene nekim brojem različitim od nule.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1b_2 + \lambda a_2b_2 - b_1a_2 - \lambda b_2a_2 \\ &= a_1b_2 - b_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

5. Ako su svi elementi jedne vrste (kolone) jednaki nuli, vrednost determinante je nula.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \cdot b_2 - 0 \cdot a_2 = 0.$$

6. Ako su elementi jedne vrste proporcionalni (ili jednaki) odgovarajućim elementima neke druge vrste, vrednost determinante je jednaka nuli.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} = a\lambda b - b\lambda a = 0.$$

7. Ako elemente jedne vrste pomnožimo kofaktorima odgovarajućih elemenata neke druge vrste i dobijene proizvode saberemo, dobićemo vrednost 0.
8. Ako je A kvadratna matrica reda n onda važi

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

9. Ako su A i B kvadratne matrice istog reda onda važi

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Primer: Izračunati $D = \begin{vmatrix} 1 & 21 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ računanjem samo jedne determinante reda 2.

Primer: Izračunati $D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Inverzna matrica

Inverzna matrica za kvadratnu matricu A , u oznaci A^{-1} , je matrica za koju važi

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Transponovana matrica matrice A , u oznaci A^T (ili A') je matrica kod koje su vrste i kolone zamenile uloge.

Primer: Odrediti transponovanu matricu za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 21 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$
i $B = \begin{bmatrix} 1 & 21 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

Osobine:

1. Ako je A kvadratna matrica, onda važi $|A^T| = |A|$.
2. $(A^T)^T = A$.
3. Ako su A i B matrice istog formata, onda važi $(A + B)^T = A^T + B^T$.
4. Ako su A i B kvadratne matrice, onda važi $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Adjungovana matrica za matricu A , u oznaci A^* je matrica čiji su elementi kofaktori odgovarajućih elemenata od A^T .

Posmatrajmo proizvoljnu matricu A formata 3×3 i njenu adjungovanu matricu A^* :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Kada se ove dve matrice pomnože, dobija se

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\tilde{A}_{11} + a_{12}\tilde{A}_{12} + a_{13}\tilde{A}_{13} & a_{11}\tilde{A}_{21} + a_{12}\tilde{A}_{22} + a_{13}\tilde{A}_{23} & a_{11}\tilde{A}_{31} + a_{12}\tilde{A}_{32} + a_{13}\tilde{A}_{33} \\ a_{21}\tilde{A}_{11} + a_{22}\tilde{A}_{12} + a_{23}\tilde{A}_{13} & a_{21}\tilde{A}_{21} + a_{22}\tilde{A}_{22} + a_{23}\tilde{A}_{23} & a_{21}\tilde{A}_{31} + a_{22}\tilde{A}_{32} + a_{23}\tilde{A}_{33} \\ a_{31}\tilde{A}_{11} + a_{32}\tilde{A}_{12} + a_{33}\tilde{A}_{13} & a_{31}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{22} + a_{33}\tilde{A}_{23} & a_{31}\tilde{A}_{31} + a_{32}\tilde{A}_{32} + a_{33}\tilde{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Na osnovu 7. osobine determinanti sledi

$$\begin{aligned} a_{11}\tilde{A}_{21} + a_{12}\tilde{A}_{22} + a_{13}\tilde{A}_{23} &= 0, & a_{11}\tilde{A}_{31} + a_{12}\tilde{A}_{32} + a_{13}\tilde{A}_{33} &= 0, \\ a_{21}\tilde{A}_{11} + a_{22}\tilde{A}_{12} + a_{23}\tilde{A}_{13} &= 0, & a_{21}\tilde{A}_{31} + a_{22}\tilde{A}_{32} + a_{23}\tilde{A}_{33} &= 0, \\ a_{31}\tilde{A}_{11} + a_{32}\tilde{A}_{12} + a_{33}\tilde{A}_{13} &= 0, & a_{31}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{22} + a_{33}\tilde{A}_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Na osnovu razvoja po elementima prve, druge, odnosno treće vrste redom imamo

$$\begin{aligned} a_{11}\tilde{A}_{11} + a_{12}\tilde{A}_{12} + a_{13}\tilde{A}_{13} &= |A|, \\ a_{21}\tilde{A}_{21} + a_{22}\tilde{A}_{22} + a_{23}\tilde{A}_{23} &= |A|, \\ a_{31}\tilde{A}_{31} + a_{32}\tilde{A}_{32} + a_{33}\tilde{A}_{33} &= |A|, \end{aligned}$$

dakle

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| \cdot I.$$

Na isti način se dobija i $A^* \cdot A = |A| \cdot I$.

Za $|A| \neq 0$ sledi

$$\frac{1}{|A|}A^* \cdot A = I \quad \text{i} \quad A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = I,$$

što na osnovu definicije inverzne matrice znači da se **inverzna matrica izračunava** na sledeći način:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

Matrica A za koju postoji inverzna matrica se zove **regularna matrica**, a uslov za postojanje inverzne matrice je $|A| \neq 0$.

Primer: Odrediti inverznu matricu za matricu $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Osobine:

1. Ako su A i B regularne matrice istog formata, onda važi

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

2. Ako je A regularna matrica, onda je i njena transponovana matrica regularna i važi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
3. Ako je A regularna matrica, onda važi $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. Ako je A regularna matrica, onda važi $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Rešavanje sistema pomoću determinanti i matičnog računa

Kramerovo pravilo

Kvadratni sistemi se mogu rešavati koristeći determinante primenom Krametrovih formula.

Neka je dat kvadratni sistem od n jednačina sa n nepoznatih. Matrici sistema odgovara determinanta reda n koja se zove **determinanta sistema** i označava sa D .

Svakoј nepoznatoј se takođe dodeljuje determinanta koja se od polazne determinante sistema dobija na sledeći način: **kolona koeficijenata koji u sistemu stoje uz posmatranu nepoznatu se zameni sa kolonom slobodnih članova.**

Za sistem tri linearne jednačine sa tri nepoznate

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1}$$

determinanta sistema i pomoćne determinante su date sa

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Neka je uređena trojka (x, y, z) rešenje sistema (1). Pomnožićemo determinantu sistema D sa x tako što ćemo sve elemente prve kolone pomnožiti sa x :

$$x \cdot D = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Sada ćemo prvoj koloni dodati drugu kolonu pomnoženu sa y , a zatim i treću kolonu pomnoženu sa z . Na osnovu osobine 4 determinanti, posmatrana determinanta ne menja svoju vrednost pri ovoj transformaciji, tako da je

$$x \cdot D = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dakle, dobili smo da je

$$x \cdot D = D_x.$$

Analogno se dolazi i do jednakosti

$$y \cdot D = D_y \quad \text{i} \quad z \cdot D = D_z.$$

Ako postoji jedinstveno rešenje sistema, onda postoje jedinstvene vrednosti nepoznatih x, y i z koje zadovoljavaju prethodne jednakosti, pa je

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \quad \text{i} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0.$$

Prethodno navedene formule pomoću kojih se izračunavaju nepoznate x, y , i z se zovu **Kramerove formule**.

Na osnovu Kramerovih formula vidimo da važi da ako je sistem određen (ima jedinstveno rešenje), onda važi $D \neq 0$. Važi i obrnuto. Ako je $D \neq 0$ i ako bi postojala dva rešenja (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) sistema (1), onda bi na osnovu prethodnog razmatranja sledilo da važi

$$x_1 \cdot D = D_x \quad \text{i} \quad x_2 \cdot D = D_x.$$

Analogno i za ostale nepoznate. Oduzimanjem ove dve jednakosti sledi

$$(x_1 - x_2) \cdot D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0$$

zato što je $D \neq 0$. Dakle, dobija se $x_1 = x_2$, tj. da postoji samo jedno rešenje. Tako je pokazano:

Kvadratni sistem linearnih jednačina je **određen ako i samo ako** je **detereminanta sistema različita od nule**.

Dakle, za kvadratni sistem linearnih jednačina reda n važi:

i) Ako je $D \neq 0$, onda imamo jedinstveno rešenje

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D} \right).$$

- ii) Ako je $D = 0$ i bar jedno $D_{x_i} \neq 0$, ($i = 1, \dots, n$), onda je sistem nemoguć.
- iii) Ako su $D = D_{x_1} = D_{x_2} = \dots = D_{x_n} = 0$, onda sistem može biti nemoguć ili neodređen, što se mora dodatno ispitati (pomoću Gausovog algoritma).

Primer: Sistem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

je očigledno dvostruko neodređen, a na osnovu osobine 6 determinanti sledi

$$D = D_x = D_y = D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Primer: Sistem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

je očigledno kontradiktoran iako je determinanta sistema ista kao u prethodnom primeru $D = 0$, a determinante koje odgovaraju svakoj nepoznatoj na osnovu osobine 6 determinanti su takođe jednake nuli. Na primer

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Priroda rešenja **homogenog kvadratnog sistema** se može odrediti na osnovu determinante sistema. Homogen sistem je uvek saglasan, tako da su moguća samo dva slučaja:

1. Ako je $D \neq 0$, onda je sistem određen. To jedino rešenje homogenog sistema je trivijano rešenje.
2. Ako je $D = 0$, sistem je neodređen, tj. ima beskonačno mnogo rešenja. Ova netrivialna rešenja homogenog sistema se mogu odrediti primenom Gausovog algoritma.

Primer: Kramerovim pravilom rešiti sistem

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= 1 \\ x + y &= 2 \\ -x + 2y + z &= 4. \end{aligned}$$

$(3, -1, 9)$

Matrične jednačine

Ranije smo videli da se sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3\end{aligned}$$

može zapisati u matričnom obliku:

$$A \cdot X = B,$$

gde su

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, posmatrani sistem linearnih jednačina je ekvivalentan dobijenoj matričnoj jednačini, tako da se do rešenja sistema može doći i rešavanjem matrične jednačine

$$A \cdot X = B. \tag{2}$$

Matrična jednačina (2) se može rešiti samo ako je matrica A regularna, tj. ako važi $|A| \neq 0$ (ako je sistem određen). Rešenje se dobija množenjem jednačine s leve strane inverznom matricom A^{-1} , tj.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Kako je $A^{-1} \cdot A = I$, sledi $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$, tj.

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Primer: Matričnim računom rešiti sistem

$$\begin{aligned}3x - y - z &= 1 \\ x + y &= 2 \\ -x + 2y + z &= 4.\end{aligned}$$

$(3, -1, 9)$

Primer: Rešiti matričnu jednačinu

$$X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 12 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$