PRIMENA IZVODA

- U mnogim primenama diferencijalnog računa, ključne informacije o funkciji f dobijamo na osnovu njenih izvoda.

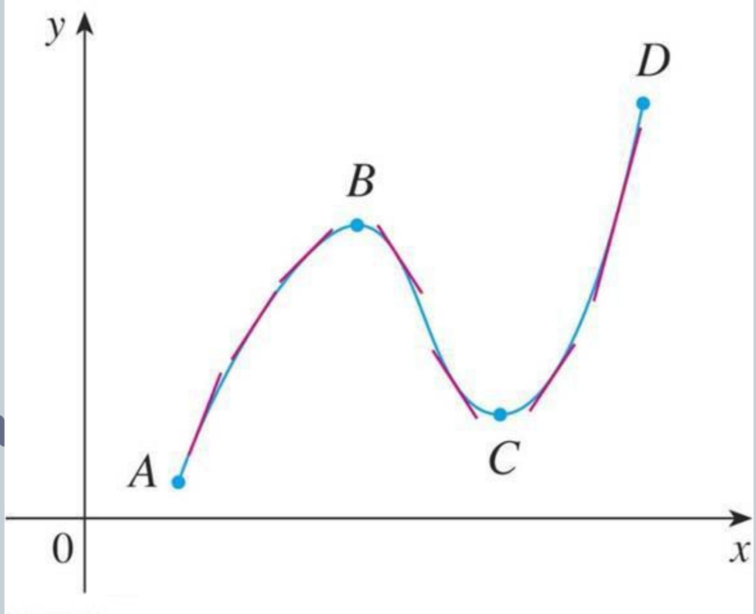
PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Kako $f'(x)$ predstavlja nagib krive $y = f(x)$ u tački $(x, f(x))$, na osnovu njega se može doneti zaključak o tome kako se grafik krive menja u svakoj tački.

  - Tako da se je za očekivati da informacije o $f'(x)$ posluže za dobijanje informacija o funkciji $f(x)$.

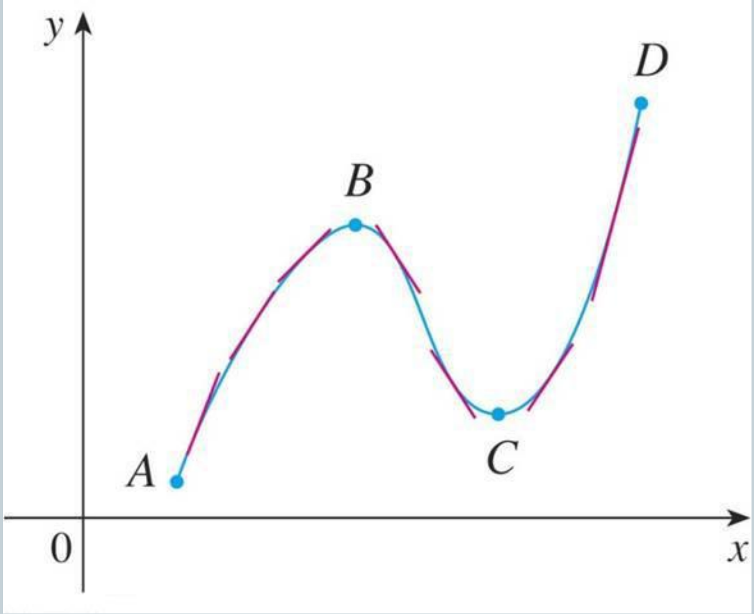
PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Na slici možemo videti kako izvod od f pokazuje gde je funkcija rastuća, a gde opadajuća.
  - Posetimo se, funkcija f je monotono opadajuća na intervalu $[a,b]$ ako $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) > f(x_2)$, a rastuća ako $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) < f(x_2)$.



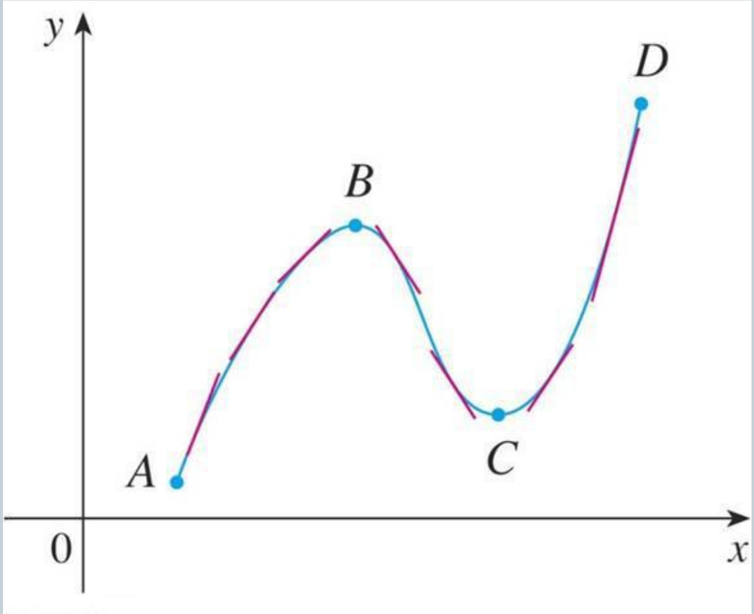
PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Između A i B, kao i između C i D, tangenta ima pozitivan nagib (koeficijent pravca).
- Tako da je, $f'(x) > 0$.



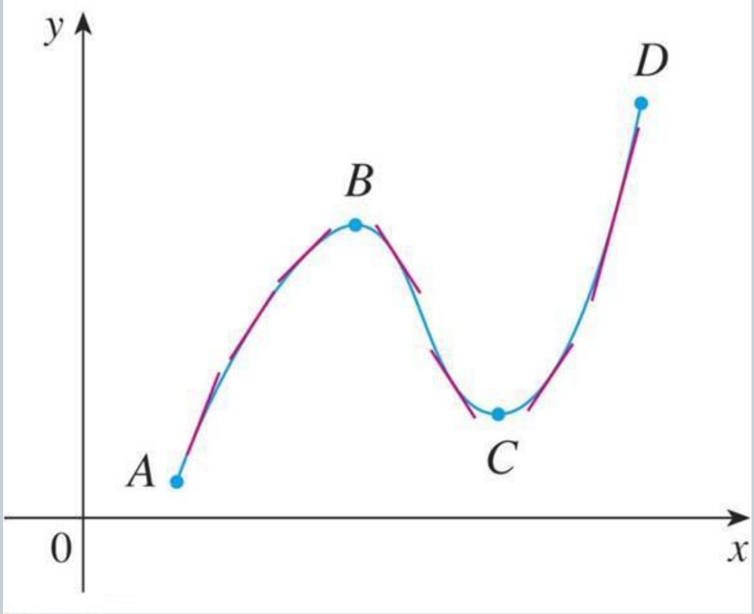
PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Između B i C, tangenta ima negativan nagib.
- Tako da je, $f'(x) < 0$.



PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Prema tome, može se zaključiti da je f rastuća funkcija kada je $f'(x)$ pozitivna, a opadajuća kada je $f'(x)$ negativna funkcija.
  - U dokazu ovog tvrđenja se koristi Teorema o srednjoj vrednosti.



PRVI IZVOD I MONOTONOST

TEOREMA

a. Ako je $f'(x) > 0$ na nekom intervalu, onda je f rastuća funkcija na tom intervalu.

b. Ako je $f'(x) < 0$ na nekom intervalu, onda je f opadajuća funkcija na tom intervalu.

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Dokaz a

Dokaz:

- Neka su x_1 i x_2 proizvoljna dva broja iz intervala koji se posmatra i neka važi $x_1 < x_2$.

- Na osnovu definicije monotono rastuće funkcije, treba da dokažemo da onda važi $f(x_1) < f(x_2)$.

PRVI IZVOD I MONOTONOST **Dokaz a**

- Kako je $f'(x) > 0$, znamo da je f diferencijabilna na $[x_1, x_2]$.

- Na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti, znamo da postoji broj c koji se nalazi između x_1 i x_2 takav da važi:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{1}$$

PRVI IZVOD I MONOTONOST **Dokaz**

- Imamo da je $f'(c) > 0$ na osnovu polazne pretpostavke i $x_2 - x_1 > 0$ jer važi $x_1 < x_2$.
- Tako da je desna strana (1) pozitivna.
- Dakle, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ tj. $f(x_1) < f(x_2)$.

  - Sledi da je f rastuća funkcija.
  - (b) se dokazuje analogno.

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 1

- Odrediti intervale rasta i opadanja funkcije

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5.$$

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 1

- $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$
  - Da bi prethodna teorema mogla da se iskoristi, mora se utvrditi gde je $f'(x) > 0$ a gde $f'(x) < 0$.
  - Ovo zavisi od predznaka sva tri činioca u izrazu za $f'(x)$: $12x$, $x - 2$, i $x + 1$.

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 1

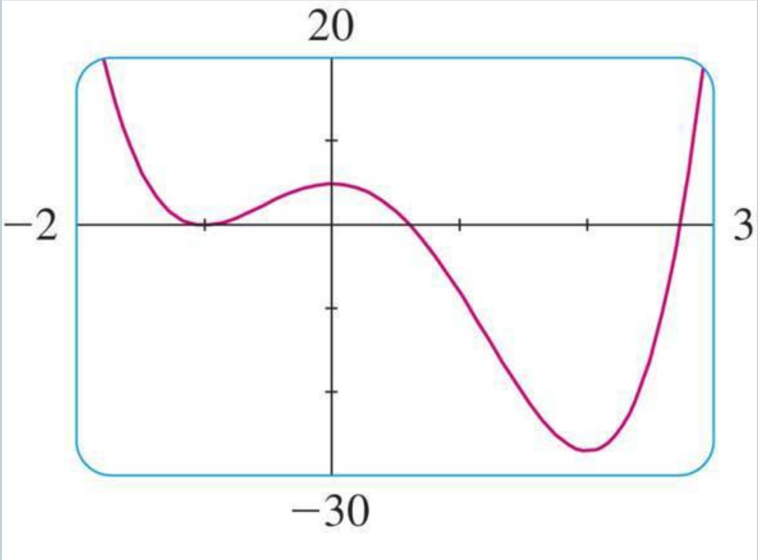
- Podelimo realnu osu na intervale pomoću kritičnih tačaka -1, 0 i 2 i onda u tabelu upišemo znak svakog od činioca na svakom od podintervala.

Interval	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x<-1$	-	-	-	-	opada na $(-\infty,-1)$
$-1<x<0$	-	-	+	+	raste na $(-1,0)$
$0<x<2$	+	-	+	-	opada na $(0,2)$
$x>2$	+	+	+	+	ste na $(2,\infty)$

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 1

- Na slici je dat grafik funkcije *f*. Uporedite ga sa podacima iz tabele.



Interval	12x	x-2	x+1	f'(x)	f
x<-1	-	-	-	-	opada na (-∞,-1)
-1<x<0	-	-	+	+	raste na (-1,0)
0<x<2	+	-	+	-	opada na (0,2)
x>2	+	+	+	+	raste na (2,∞)

PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Podsetimo se Fermaove teoreme sa prethodnih slajdova (u skripti Teorema 7.6):

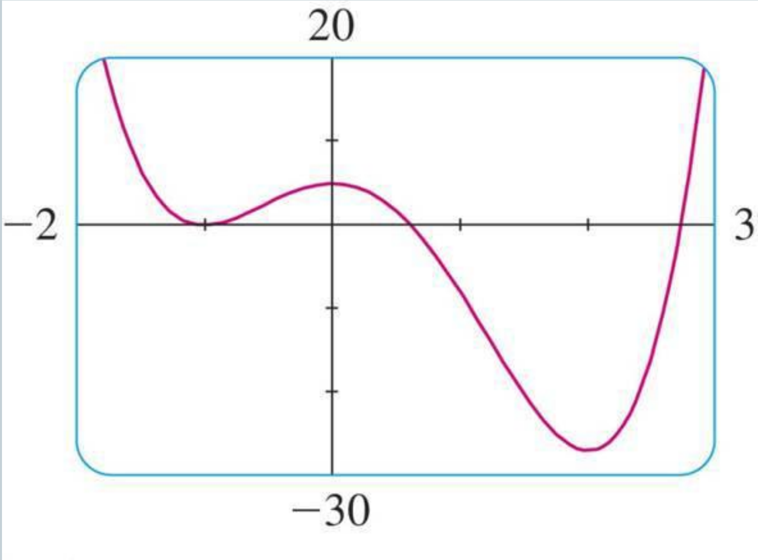
  Ako f ima lokalni ekstrem u c, onda je c kritična tačka funkcije f.

  - Međutim, nisu sve kritične tačke ekstremne tačke.

  - Dakle, treba nam kriterijum koji će nam dati odgovor na pitanje da li f ima lokalni maksimum ili minimum u kritičnoj tački.

PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Sa slike vidimo da je $f(0) = 5$ lokalni maksimum funkcije f zato što je f rastuća funkcija na (-1, 0) a opadajuća na (0, 2).
  - Ako to iskažemo preko izvoda: $f'(x) > 0$ za $-1 < x < 0$ i $f'(x) < 0$ za $0 < x < 2$.



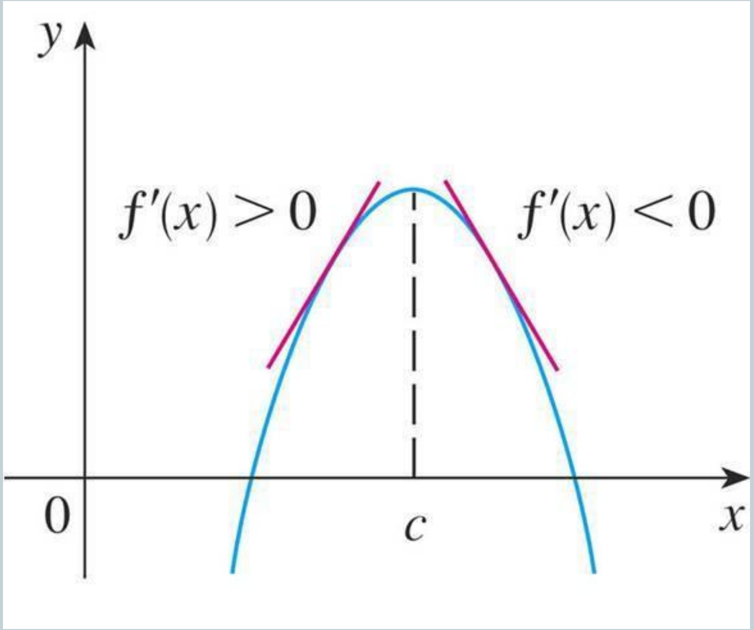
PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Drugim rečima, znak od $f'(x)$ se menja u o.
  - Ovo zapažanje se koristi kao test za određivanje koja od kritičnih tačaka jeste, a koja nije ekstremna vrednost u slučaju kada je f diferencijabilna funkcija u okolini kritične tačke.

PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Neka je *c* kritična tačka neprekidne funkcije *f* i neka je *f* diferencijabilna u nekoj okolini tačke *c*.

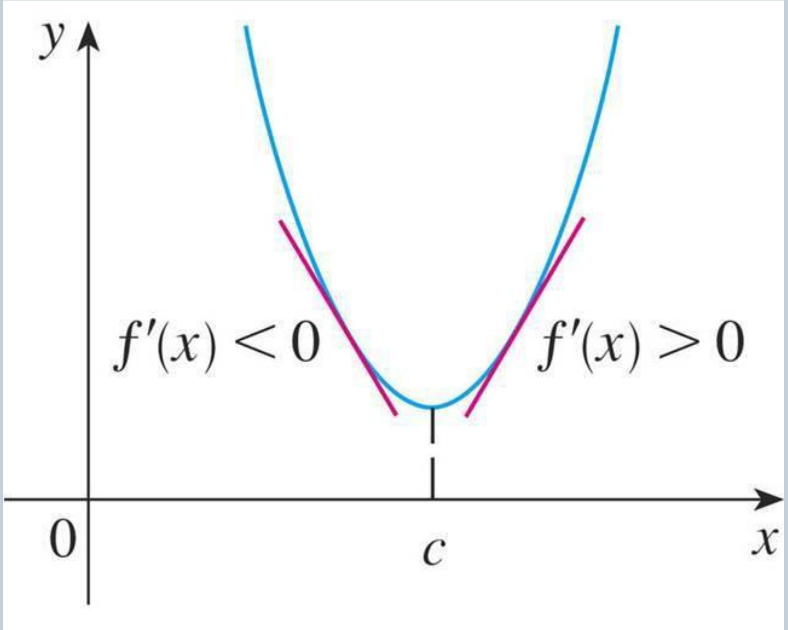
- a. Ako je znak od *f'* u levoj okolini od *c* pozitivan, a u desnoj negativan, onda *f* ima lokalni maksimum u *c*.



lokalni maksimum

PRVI IZVOD I MONOTONOST

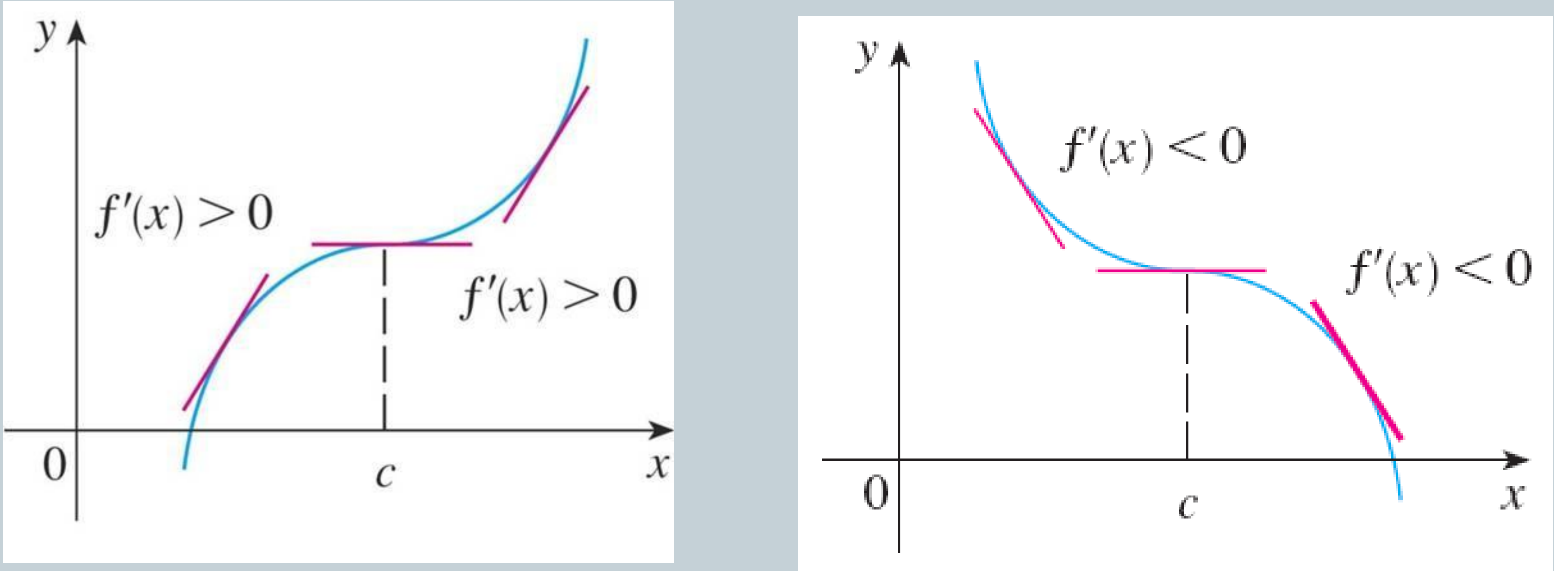
- b. Ako je znak od *f'* u levoj okolini od *c* negativan, a u desnoj poztivan, onda *f* ima lokalni minimum u *c*.



lokalni minimum

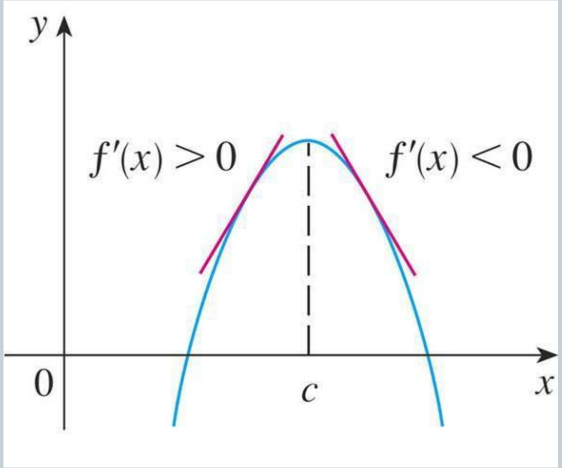
PRVI IZVOD I MONOTONOST

- c. Ako *f'* ne menja znak u *c*, to jest ako je *f'* > *0* ili ako je *f'* < *0* i u levoj i u desnoj okolini od *c*, onda *f* nema lokalni ekstrem u *c*.



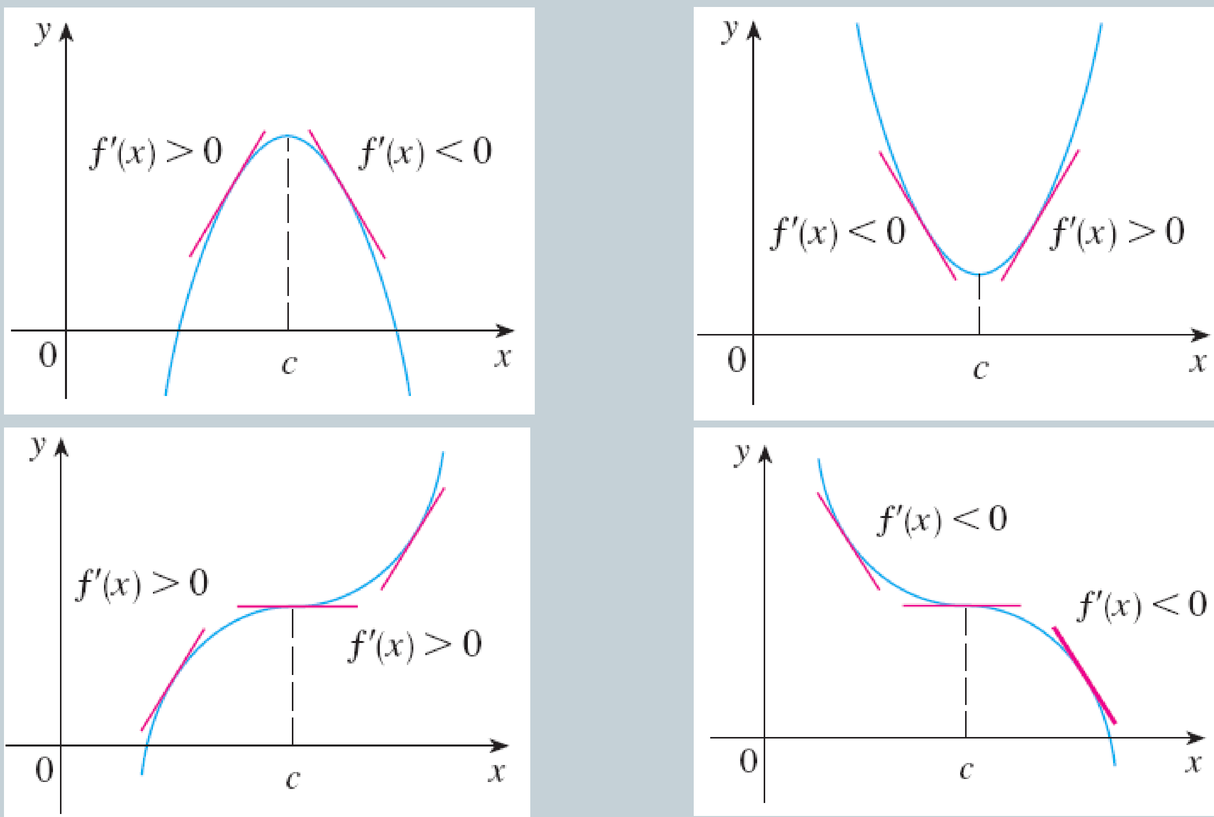
PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Ovaj kriterijum za utvrđivanje lokalnih ekstrema je posledica teoreme koja povezuje znak prvog izvoda i monotonost funkcije.
  - (a): kako se znak od $f'(x)$ menja od pozitivnog ka negativnom u c, sledi da je f rastuća do c (levo od c), a opadajuća posle c (desno od c).
  - Prema tome, u ovom slučaju f ima lokalni maksimum u c.
  - Analogno tvrđenje važi i za lokalni maksimum u c.



PRVI IZVOD I MONOTONOST

- Dakle, kriterijum se lako pamti vizualizacijom.



Primer 2

- Naći lokalne ekstreme funkcije f iz Primera 1.

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 2

- Iz tabele u kojoj je dato rešenje za Primer 1, vidi se da $f'(x)$ menja znak iz negativnog u pozitivan u -1.
  - Dakle, $f(-1) = 0$ je lokalni minimum funkcije f.

Interval	12x	x-2	x+1	f'(x)	f
x<-1	-	-	-	-	opada na (-∞,-1)
-1<x<0	-	-	+	+	raste na (-1,0)
0<x<2	+	-	+	-	opada na (0,2)
x>2	+	+	+	+	raste na (2,∞)

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 2

- Takođe, *f'* menja znak iz negativnog u pozitivan u 2.
  - Dakle, $f(2) = -27$ je takođe minimum funkcije *f*.

Interval	12x	x-2	x+1	f'(x)	f
x<-1	-	-	-	-	opada na (-∞,-1)
-1<x<0	-	-	+	+	raste na (-1,0)
0<x<2	+	-	+	-	opada na (0,2)
x>2	+	+	+	+	raste na (2,∞)

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 2

- $f(0) = 5$ je lokalni maksimum zato što $f'(x)$ menja znak iz pozitivnog u negativan u 0.

Interval	12x	x-2	x+1	f'(x)	f
x<-1	-	-	-	-	opada na (-∞,-1)
-1<x<0	-	-	+	+	raste na (-1,0)
0<x<2	+	-	+	-	opada na (0,2)
x>2	+	+	+	+	raste na (2,∞)

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 3

- Naći lokalne ekstreme funkcije

$$g(x) = x + 2\sin x \qquad 0 \le x \le 2\pi\,.$$

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 3

- Da bi se mogle pronaći kritične tačke funkcije *g*, diferenciramo je:

$$g'(x) = 1 + 2\cos x,\ 0 \le x \le 2\pi\ .$$

  - Dakle, $g'(x) = 0$ kada je $\cos x = -½$.
  - Rešenja ove jednačine na zadatom intervalu su $2\pi/3$ i $4\pi/3$.

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 3

- Kako je g diferencijabilna svuda, $2\pi/3$ i $4\pi/3$ su jedine kritične tačke za g.

- Analiza intervala monotonosti funkcije g je data u tabeli.

Interval	$g'(x)=1+2\cos x$	g
$0<x<2\pi/3$	+	rastuća na $(0,2\pi/3)$
$2\pi/3<x<4\pi/3$	-	opadajuća na $(2\pi/3,4\pi/3)$
$4\pi/3<x<2\pi$	+	rastuća na $(4\pi/3,2\pi)$

PRVI IZVOD I MONOTONOST **Primer 3**

- Kako $g'(x)$ menja znak iz pozitivnog u negativan u $2\pi/3$, sledi da funkcija g ima lokalni maksimum u $2\pi/3$.
  - Lokalni maksimum je vrednost koju dobijamo izračunavanjem vrednosti funkcije u $2\pi/3$:

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$\approx 3.83$$

Interval	g'(x)=1 + 2cosx	g
0<x<2π/3	+	rastuća na (0,2π/3)
2π/3<x<4π/3	-	opadajuća na (2π/3,4π/3)
4π/3<x<2π	+	rastuća na (4π/3,2π)

PRVI IZVOD I MONOTONOST

Primer 3

- Takođe, $g'(x)$ menja znak iz negativnog u pozitivan u $4\pi/3$.
  - Dakle, lokalni minimum je:

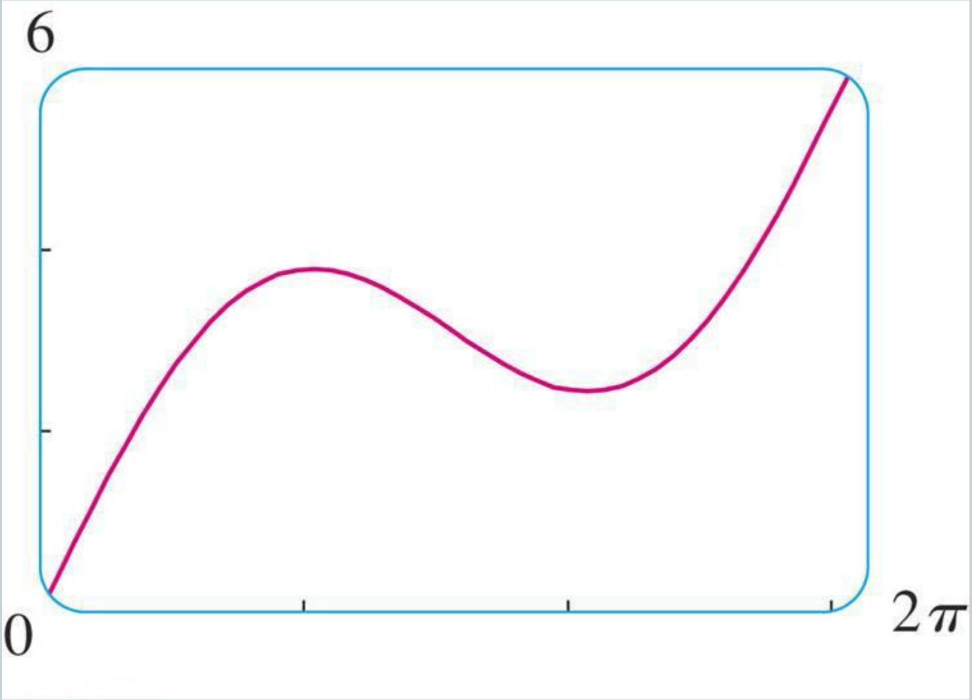
$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$\approx 2.46$$

Interval	g'(x)=1 + 2cosx	g
0<x<2π/3	+	rastuća na (0,2π/3)
2π/3<x<4π/3	-	opadajuća na (2π/3,4π/3)
4π/3<x<2π	+	rastuća na (4π/3,2π)

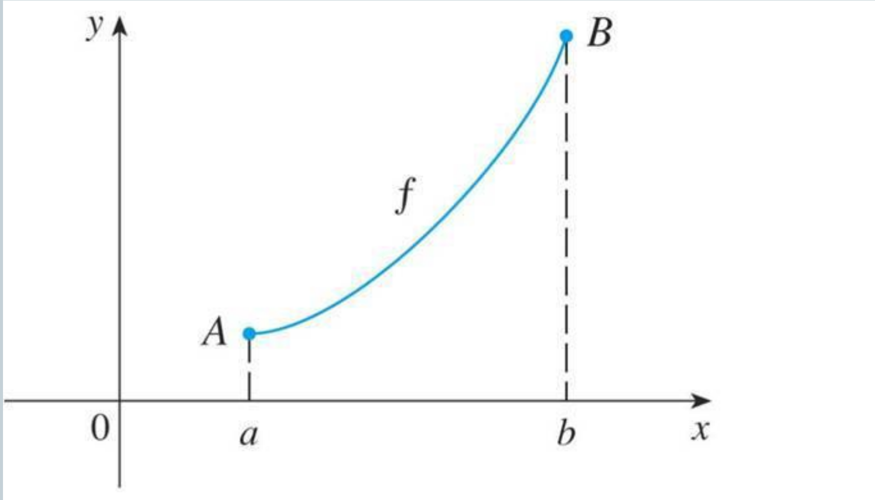
Primer 3

- Na slici je dat grafik funkcije g.

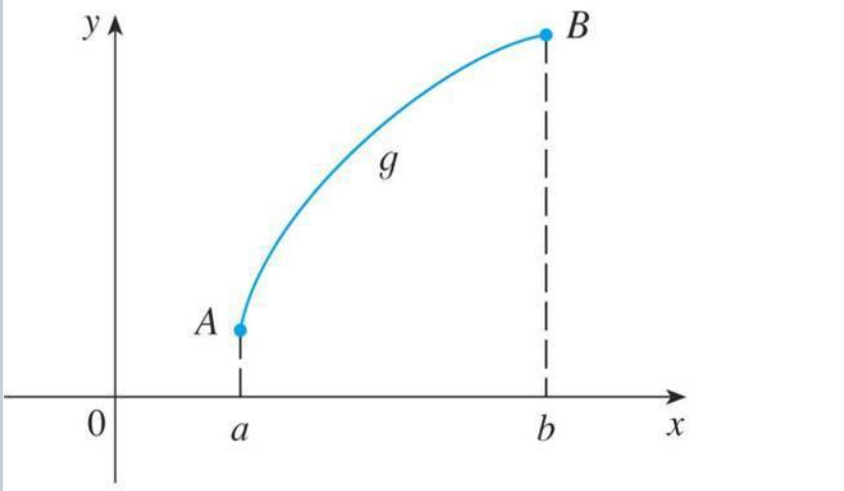


DRUGI IZVOD I ZAKRIVLJENOST

- Na sledećim slikama su prikazani grafici rastućih funkcija f i g na intervalu (a, b).



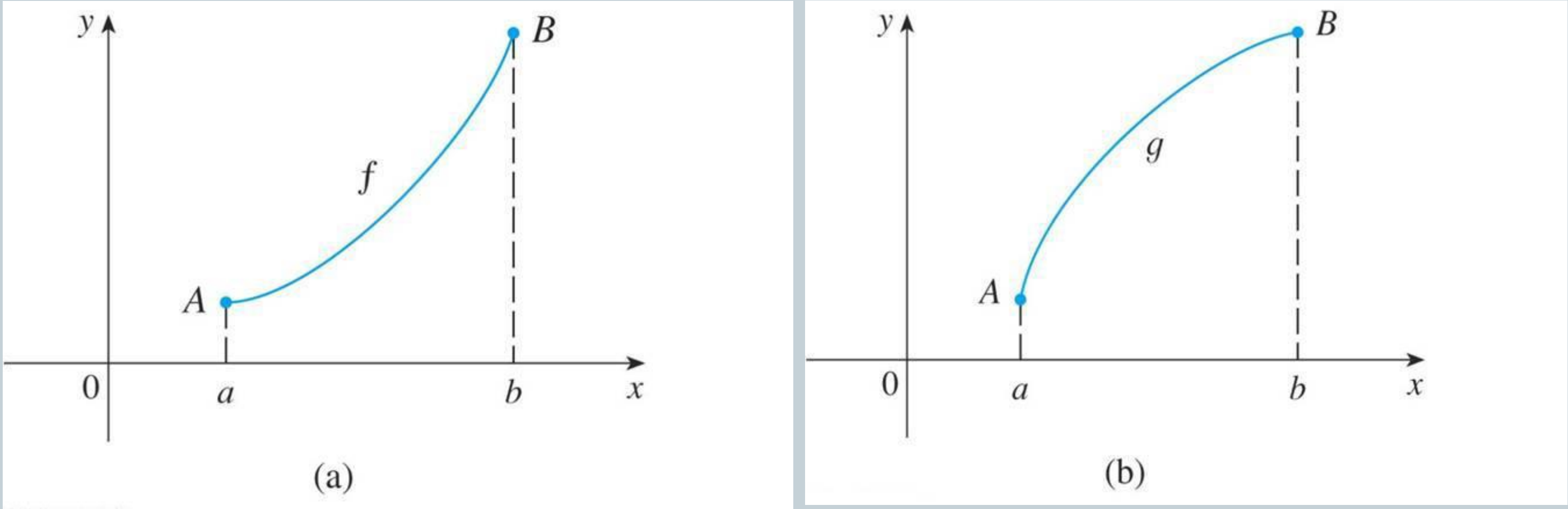
(a)



(b)

DRUGI IZVOD I ZAKRIVLJENOST

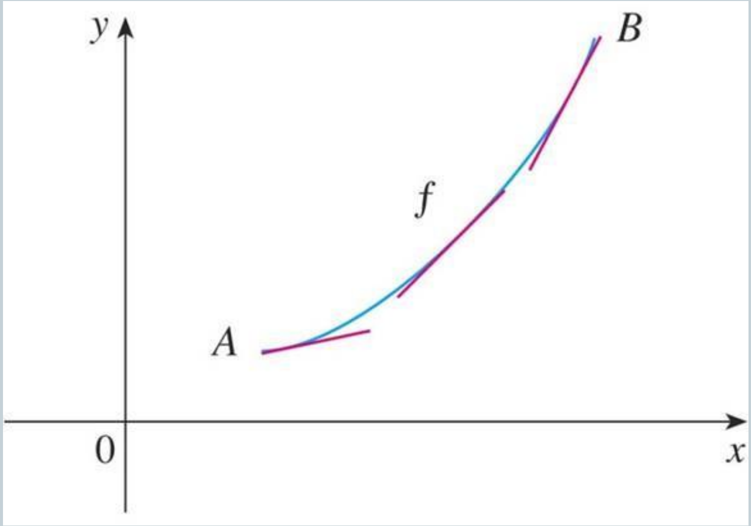
- Oba grafika povezuju tačke A i B, ali na drugačiji način.
  - Na koji način se može razlikovati ove dve vrste zakrivljenosti grafika funkcije?



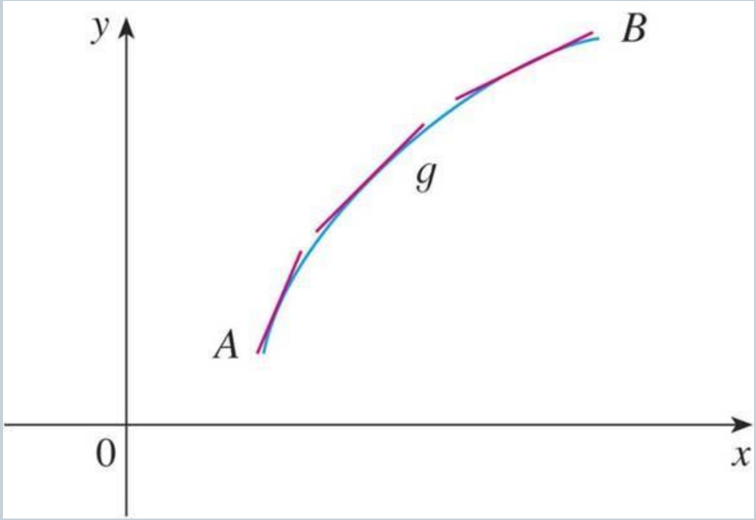
(a) (b)

DRUGI IZVOD I ZAKRIVLJENOST

- Na slikama su nacrtane tangente u nekim tačkama datih krivih.



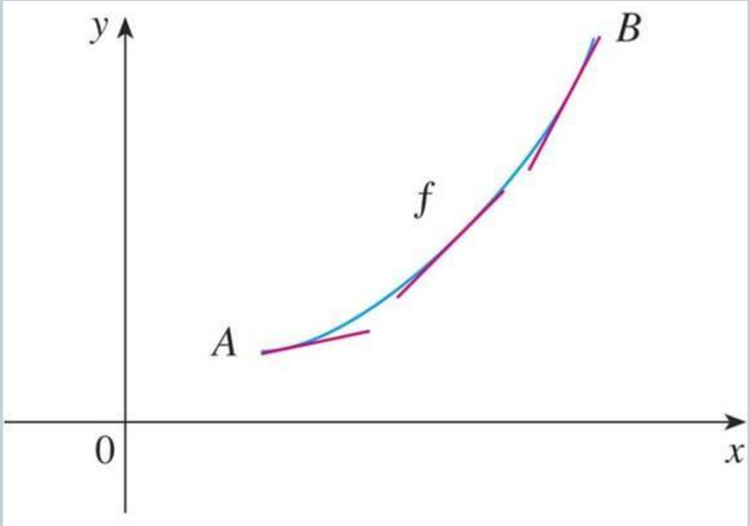
f je konveksna



g je konkavna

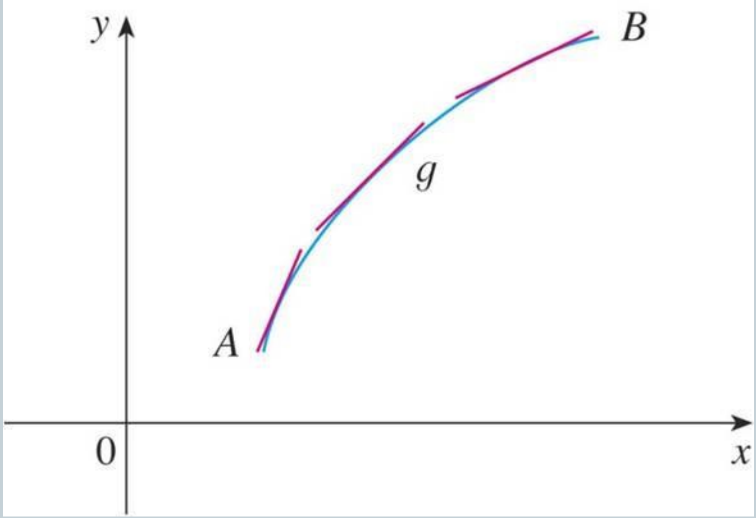
ZAKRIVLJENOST FUNKCIJE

- Na prvoj slici, kriva se nalazi iznad tangenti koje su nacrtane i f je tada *konveksna* funkcija na (a, b).



ZAKRIVLJENOST FUNKCIJE

- Na drugoj slici, kriva se nalazi ispod tangenti koje su nacrtane i g je onda *konkavna* funkcija na (a, b).



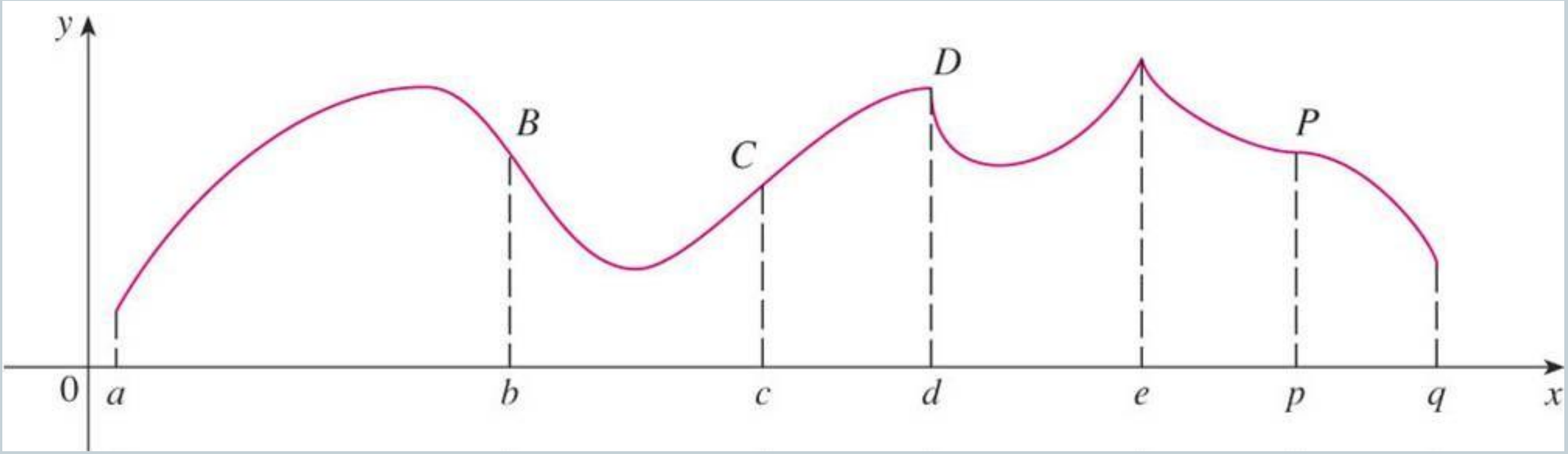
DEFINICIJA

- Ako se grafik diferencijabilne funkcije *f* nalazi iznad svake svoje tangente na nekom intervalu *I*, onda je funkcija konveksna na *I*.

- Ako se grafik diferencijabilne funkcije *f* nalazi ispod svake svoje tangente na nekom intervalu *I*, onda je funkcija konkavna na *I*.

ZAKRIVLJENOST FUNKCIJE

- Na slici je prikazan grafik funkcije koja je konveksna na intervalima (b, c), (d, e) i (e, p), a konkavna na intervalima (a, b), (c, d) i (p, q).



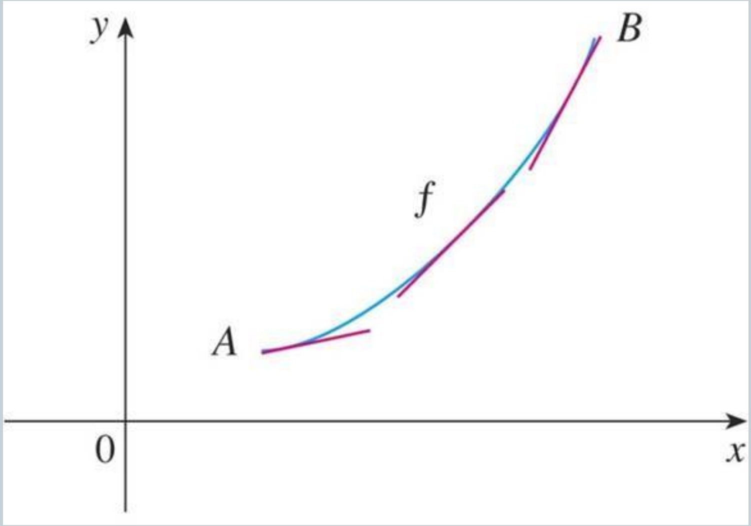
ZAKRIVLJENOST FUNKCIJE

- U nastavku će biti prikazano kako se pomoću drugog izvoda mogu odrediti intervali na kojima je funkcija konveksna ili konkavna.

ZAKRIVLJENOST FUNKCIJE

- Na slici se vidi da se, gledajući sa leva na desno, nagib tangente povećava.

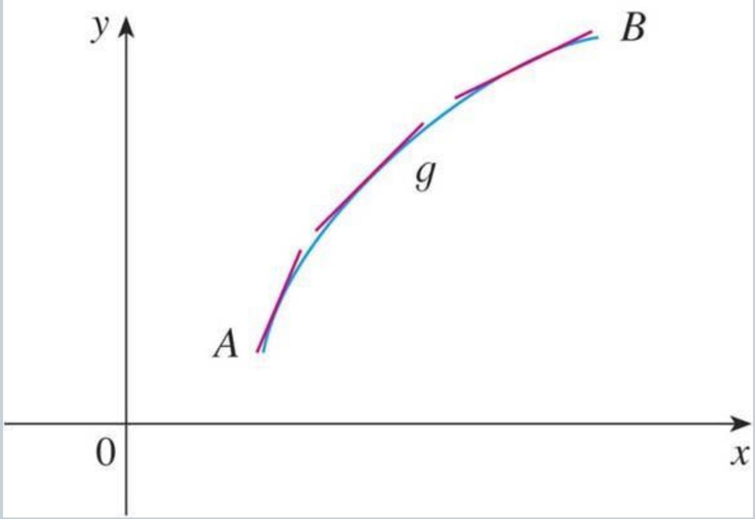
  - To znači da je izvod *f'* rastuća funkcija i da je stoga drugi izod *f''* pozitivan.



ZAKRIVLJENOST FUNKCIJE

- Slično, na ovoj slici se vidi da se nagib tangente smanjuje kada se gleda s leva na desno.
- Dakle, *f'* je opadajuća funkcija i onda je *f''* negativan.

  - Ovo rezonovanje se može upotrebiti i u drugom smeru, tako da imamo sledeću teoremu.



ZAKRIVLJENOST FUNKCIJE

TEOREMA

a. Ako je $f''(x) > 0$ za sve x iz I, onda je f konveksna funkcija na I.

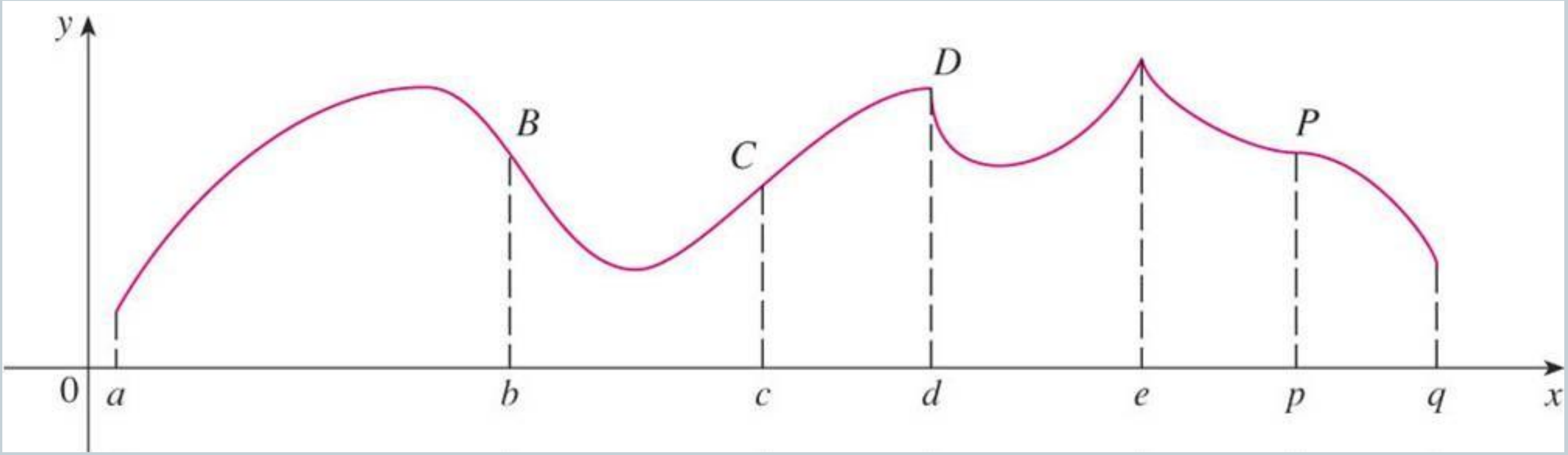
b. Ako je $f''(x) < 0$ za sve x iz I, onda je f konkavna funkcija na I.

PREVOJNA TAČKA—DEFINICIJA

- Prevojna tačka je tačka na krivoj $y = f(x)$ u kojoj neprekidna funkcija f menja svoju zakrivljenost iz konveksne u konkavnu ili iz konkavne u konveksnu.

PREVOJNA TAČKA

- Na primer, na ovoj slici, *B*, *C*, *D* i *P* su prevojne tačke.
- Uočimo da ako kriva ima tangentu u prevojnoj tački, onda kriva preseca tangentu u toj tački.



PREVOJNA TAČKA

- Na osnovu uslova za konveksnost i konkavnost može se zaključiti da je prevojna tačka funkcije f svaka tačka u kojoj drugi izvod te funkcije menja znak.

DRUGI IZVOD I ZAKRIVLJENOST **Primer 5**

- Skicirati mogući grafik neke funkcije f koja zadovoljava sledeće uslove:

(i) $f'(x) > 0$ na $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ na $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ na $(-\infty, -2)$ i $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ na $(-2, 2)$

(iii)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

DRIGI IZVOD I ZAKRIVLJENOST **uslov (i)**

- Iz prvog uslova sledi da je funkcija f rastuća na $(-\infty , 1)$, a opadajuća na intervalu $(1, \infty)$.

DRUGI IZVOD I ZAKRIVLJENOST **uslov (ii)**

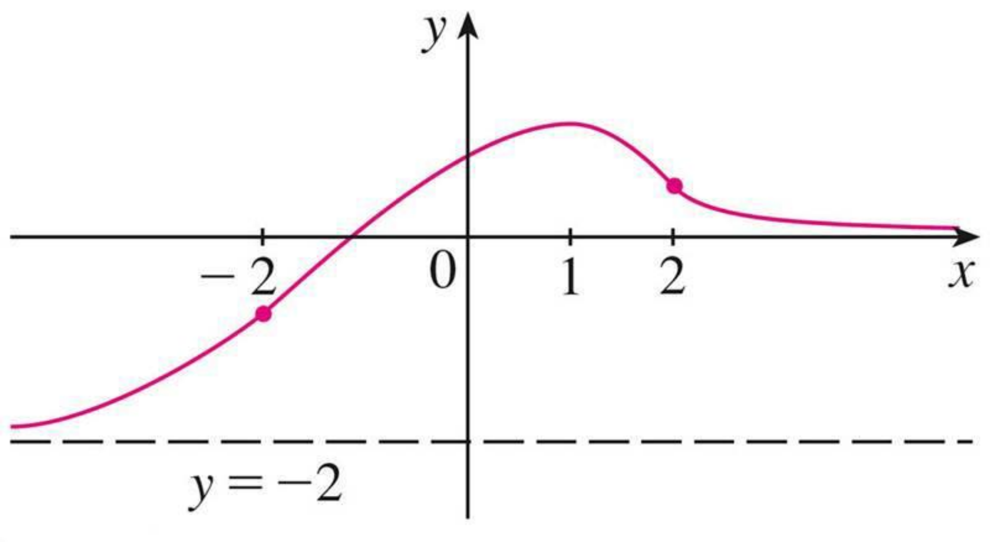
- Iz drugog uslova sledi da je funkcija f konveksna na $(-\infty, -2)$ i $(2, \infty)$, a konkavna na $(-2, 2)$.

DRIGI IZVOD I ZAKRIVLJENOST **uslov (iii)**

- Na osnovu trećeg uslova sledi da grafik funkcije f ima dve horizontalne asimptote:
  - $y = -2$
  - $y = 0$

DRUGI IZVOD I ZAKRIVLJENOST **Primer 5**

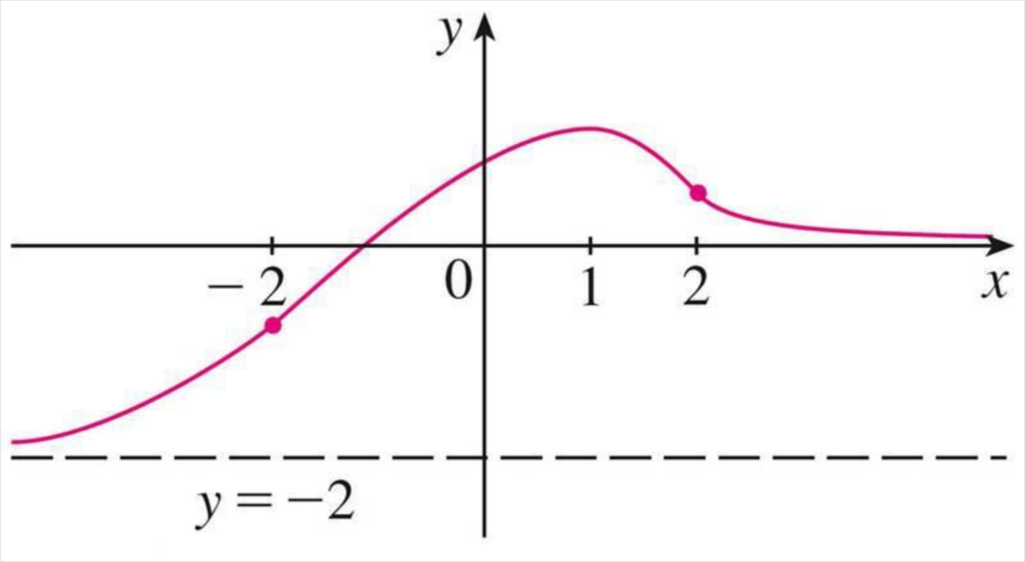
- Prvo se nacrta horizontalna asimptota $y = -2$.
  - Zatim grafik funkcije f koji joj se približava kada se x neograničeno smanjuje, raste do svog maksimuma u $x = 1$ i opada približavajući se x-osi kada se x neograničeno povećava.



DRUGI IZVOD I ZAKRIVLJENOST

Primer 5

- Treba naglasiti da grafik ima prevojne tačke za x = -2 i x= 2.
  - Grafik krive je nacrtan tako da ispunjava drugi uslov, tj. da je kriva konveksna za x < -2 i x > 2, a konkavna kada je x između -2 i 2.



DRUGI IZVOD I EKSTREMNE VREDNOSTI

- Drugi izvod se može primeniti i na određivanje ekstremnih vrednosti funkcije.

DRUGI IZVOD I EKSTREMNE VREDNOSTI

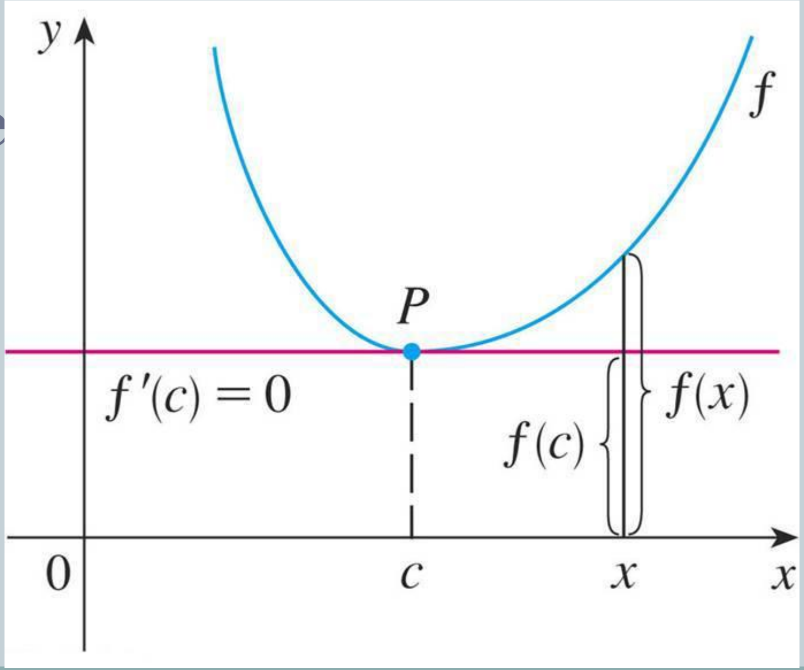
- Neka je f'' neprekidna funkcija u okolini od c.

a. Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda f ima lokalni minimum u c.

b. Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda f ima lokalni maksimum u c.

DRUGI IZVOD I EKSTREMNE VREDNOSTI

- Na primer, (a) je tačno zato što je $f''(x) > 0$ u okolini od c, pa je onda f konveksna u okolini od c.
  - To znači da se grafik funkcije f nalazi iznad njene horizontalne tangente u c, tako da f ima lokalni minimum u c.



Primer 6

- Ispitati zakrivljenost funkcije

$$y = x^4 - 4x^3$$

  i naći prevojne tačke i tačke lokalnih ekstrema.

- Pomoću ovih informacija skicirati grafik funkcije.

Primer 6

- Kako je $f(x) = x^4 - 4x^3$, imamo:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

DRUGI IZVOD, EKSTREMNE VREDNOSTI I ZAKRIVLJENOST

Primer 6

- Kritične tačake ćemo dobiti iz $f'(x) = 0$. Sledi da su to vrednosti $x = 0$ i $x = 3$.

- Da bismo primenili drugi izvod na određivanje ekstremnih vrednosti, izračunaćemo f'' u kritičnim tačkama:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

DRUGI IZVOD, EKSTREMNE VREDNOSTI I ZAKRIVLJENOST

Primer 6

- Kako je $f'(3) = 0$ i $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ je lokalni minimum funkcije f.

- Kako je $f''(0) = 0$, pomoću drugog izvoda ne možemo dobiti odgovor na pitanje da li f ima lokalni ekstrem u 0.

DRUGI IZVOD, EKSTREMNE VREDNOSTI I ZAKRIVLJENOST

Primer 6

- Međutim, kako je $f'(x) < 0$ za $x < 0$, ali takođe i za $0 < x < 3$, na osnovu toga se može zaključiti da f nema lokalni ekstrem u 0.
  - Na osnovu izraza za $f'(x) = 4x^2(x - 3)$ sledi da f opada levo od 3 i raste desno od 3.

DRUGI IZVOD, EKSTREMNE VREDNOSTI I ZAKRIVLJENOST

Primer 6

- Kako je $f''(x) = 0$ za $x = 0$ i $x = 2$, realna osa se podeli ovim brojevima i predznak u svakom podintervalu upiše u tablelu.

Interval	f''(x)=12x(x-2)	zakrivljenost
$(-\infty,0)$	+	konveksna
$(0,2)$	-	konkavna
$(2,\infty)$	+	konveksna

Primer 6

- Tačka (0, 0) je prevojna tačka jer funkcija u njoj menja zakrivljenost—iz konveksne u konkavnu.

Interval	f''(x)=12x(x-2)	zakrivljenost
(-∞,0)	+	konveksna
(0,2)	-	konkavna
(2,∞)	+	konveksna

Primer 6

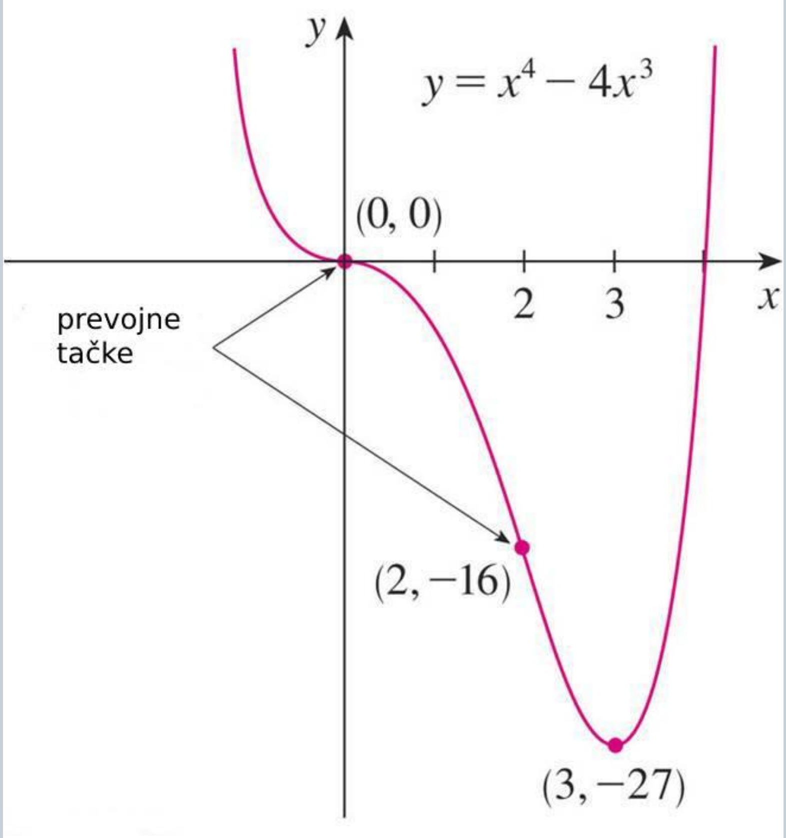
- Takođe je i (2, -16) prevojna tačka jer funkcija menja zakrivljenost, samo sada iz konkavne u konveksnu.

Interval	$f''(x)=12x(x-2)$	zakrivljenost
$(-\infty,0)$	+	konveksna
$(0,2)$	-	konkavna
$(2,\infty)$	+	konveksna

DRUGI IZVOD, EKSTREMNE VREDNOSTI I ZAKRIVLJENOST

Primer 6

- Koristeći dobijene podatke o ekstremnim vrednostima, zakrivljenosti i tačkama prevoja, grafik može biti skiciran.



NAPOMENA

- Drugi izvod se ne može koristiti za određivanje ekstremnih vrednosti funkcije u *c* kada je $f''(c) = 0$.
  - Drugim rečima, takva tačka može biti minimum ili maksimum, ali ne mora biti ništa od ta dva (kao što je to bio slučaj u Primeru 6).

NAPOMENA

- Drugi izvod kao kriterijum za ekstremne vrednosti se ne može koristiti ni u slučaju kada $f''(c)$ ne postoji.

- Tada se ekstremne vrednosti mogu odrediti isključivo pomoću znaka prvog izvoda u okolini kritične tačke.

GRAFIK FUNKCIJE

Primer 7

- Skicirati grafik funkcije

$$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$$

  - Prvi i drugi izvod funkcije f:

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

  - Kako je $f'(x) = 0$ za $x = 4$ i $f'(x)$ nije definisan za $x = 0$ i $x = 6$, kritične tačke su 0, 4 i 6.

Primer 7

- Za određivanje lokalnih ekstrema, korističe se prvi izvod.
  - Pošto f' menja znak iz negativnog u pozitivan u 0, sledi da je $f(0) = 0$ lokalni minimum.

Interval	4-x	x⅓	(6-x)⅔	f'(x)	f
x<0	+	-	+	-	opada na (-∞,0)
0<x<4	+	+	+	+	raste na (0,4)
4<x<6	-	+	+	-	opada na (4,6)
x>6	-	+	+	-	opada na (6,∞)

GRAFIK FUNKCIJE

Primer 7

- Kako f' menja znak iz pozitivnog u negativan u 4, $f(4) = 2^{5/3}$ je lokalni maksimum.

- Znak f' se ne menja u 6, tako da u toj tački funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Interval	4-x	x⅓	(6-x)⅔	f'(x)	f
x<0	+	-	+	-	opada na (-∞,0)
0<x<4	+	+	+	+	raste na (0,4)
4<x<6	-	+	+	-	opada na (4,6)
x>6	-	+	+	-	opada na (6,∞)

GRAFIK FUNKCIJE

Primer 7

- Drugi izvod kao kriterijum za ekstrem se može koristiti za x=4, ali ne i za x=0 i x= 6 pošto f'' ne postoji u tim tačkama.

Interval	4-x	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	f'(x)	f
x<0	+	-	+	-	opada na $(-\infty,0)$
0<x<4	+	+	+	+	raste na (0,4)
4<x<6	-	+	+	-	opada na (4,6)
x>6	-	+	+	-	opada na $(6,\infty)$

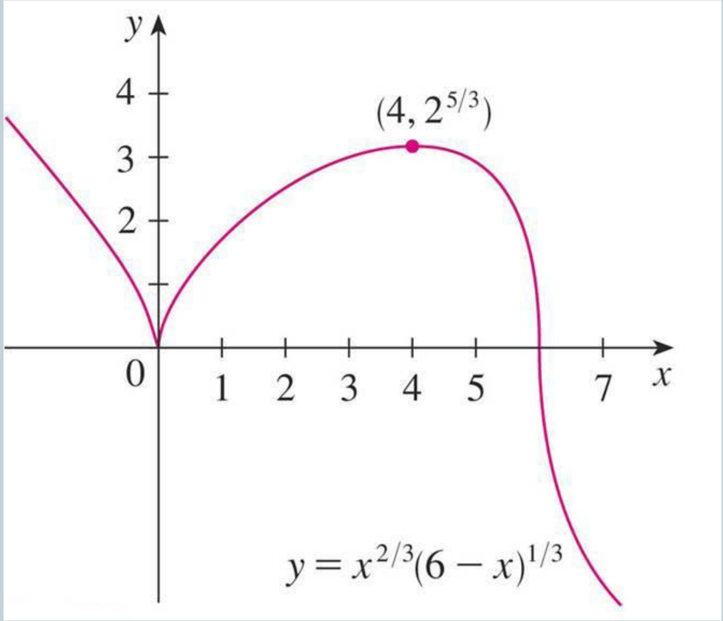
Primer 7

- Posmatrajući izraz za $f''(x)$ i imajući na umu da je $x^{4/3} \geq 0$ za svako x, imamo:
  - $f''(x) < 0$ za $x < 0$ i za $0 < x < 6$
  - $f''(x) > 0$ za $x > 6$

GRAFIK FUNKCIJE

Primer 7

- Dakle, f je konkavna na $(-\infty, 0)$ i $(0, 6)$, a konveksna na $(6, \infty)$. Jedina prevojna tačka je $(6, 0)$.
  - Uočimo da kriva ima vertikalne tangente u $(0, 0)$ i $(6, 0)$ zato što $|f'(x)| \to \infty$ kada $x \to 0$ i kada $x \to 6$.



GRAFIK FUNKCIJE

Primer 8

- Odrediti asimptote funkcije $f(x) = e^{1/x}$ i na osnovu informacija dobijenih na osnovu prvog i drugog izvoda, skicirati njen grafik.
  - Domen funkcije f je $\{x \mid x \neq 0\}$.
  - Dakle, vertikalne asimtote se ispituju računajući levi i desni limes funkcije kada $x \to 0$.

GRAFIK FUNKCIJE

- Kada $x \to 0^+$, imamo da $t = 1/x \to \infty$.
- Dakle, $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty$
  - Iz ovoga sledi da je $x = 0$ vertikalna asimptota sa desne strane.
- Kada $x \to 0^-$, imamo da $t = 1/x \to -\infty$.
- Tako da važi $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$

Dakle, sa leve strane nemamo vertikalnu asimptotu, već se funkcija približava tački (0,0).

GRAFIK FUNKCIJE

- Kada $x \to \pm\infty$, imamo $1/x \to 0$.
- Dakle, $$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$
  - Tako da se može zaključiti da je prava $y = 1$ horizontalna asimptota funkcije f kada $x \to -\infty$ i kada $x \to \infty$.

GRAFIK FUNKCIJE

- Sada treba izračunati izvode.

- Pravilo za izvod složene funkcije daje:

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

  - Kako je $e^{1/x} > 0$ i $x^2 > 0$ za sve $x \neq 0$, imamo da je $f'(x) < 0$ za svako $x \neq 0$.

  - Tako da je f **opadajuća** funkcija na $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$, tj. **na celom domenu**.

GRAFIK FUNKCIJE

- Ova funkcija nema kritičnih tačaka.
- Dakle, nema ekstremnih vrednosti.

GRAFIK FUNKCIJE

- Drugi izvod je dat izrazom:

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

GRAFIK FUNKCIJE

- Kako je $e^{1/x} > 0$ i $x^4 > 0$, sledi:

  $f''(x) > 0$ za $2x + 1 > 0$, tj. $x > -1/2$ $(x \neq 0)$

  $f''(x) < 0$ za $2x + 1 < 0$, tj. $x < -1/2$.

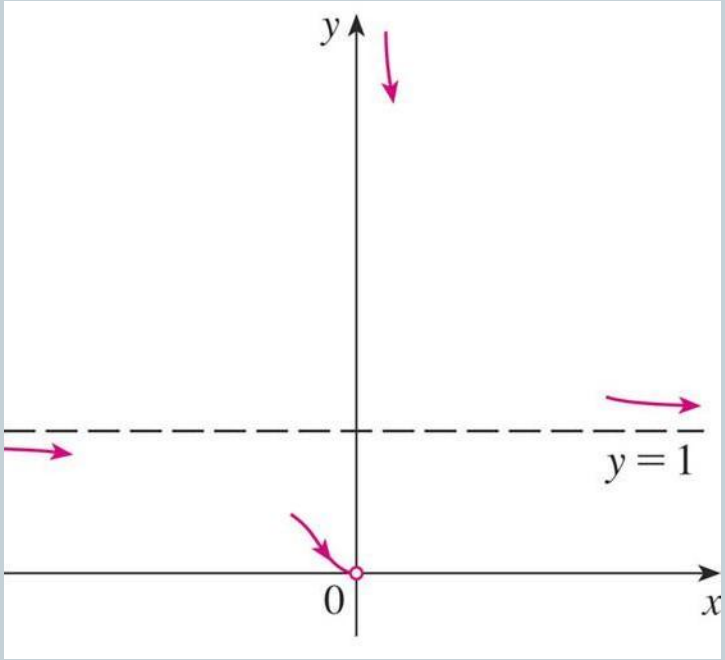
  - Dakle, funkcija je konkavna na $(-\infty, -1/2)$, a konveksna na $(-1/2, 0)$ i $(0, \infty)$.

  - Prevojna tačka je $(-1/2, e^{-2})$.

GRAFIK FUNKCIJE

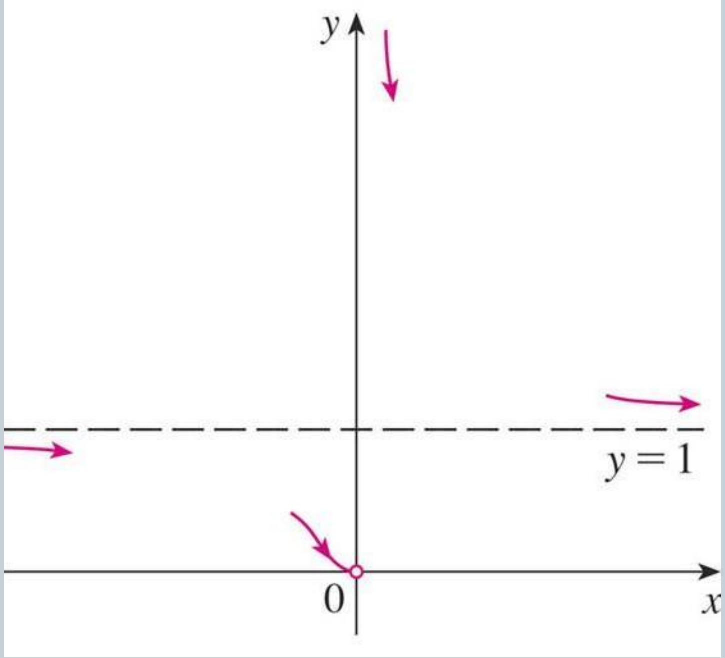
- Da bi se mogao skicirati grafik funkcije f, prvo se nacrta horizontalna asimptota $y = 1$ (isprekidanom linijom), i na njoj naznače delovi grafika gde joj se funkcija približava

(Na istom crtežu smo naznačili i ponašanje funkcije f u blizini tačke $x = 0$.)



GRAFIK FUNKCIJE

- Ovaj deo grafika odražava zaključke dobijene na osnovu limesa, kao i činjenicu da je *f* opadajuća funkcija na intervalu (-∞, 0), kao i na (0, ∞).
  - Ucrtano je i da $f(x) \to 0$ kada $x \to 0^-$, jer $f(0)$ ne postoji (što je označeno praznim kružićem na grafiku).
  - Takođe treba primetiti da je funkcija pozitivna, tj. da se njen grafik ceo nalazi iznad x-ose.



GRAFIK FUNKCIJE

- Crtanje grafika funkcije se završava unošenjem informacija o jednostranoj vertikalnoj asimptoti, konveksnosti, konkavnosti i prevojnoj tački.