Neodređeni integral

UVOD

- Pitanje iz fizike:
- Ako je poznata brzina kojom se objekat kreće, kako bi mogao da se odredi njegov položaj u datom trenutku?

UVOD

- Pitanje iz biologije:
- Ako je poznata stopa rasta populacije bakterija, kako bi se moglo zaključiti koje će veličine biti ta populacija u nekom budućem vremenu?

PRIMITIVNA FUNKCIJA

- U oba pomenuta slučaja, problem se svodi na pronalaženje funkcije F čiji izvod je poznata funkcija f.
- Ako takva funkcija F postoji, onda se ona zove primitivna funkcija od f.

DEFINICIJA

- Neka je f funkcija koja je definisana nad nekim intervalom I.

  Svaka funkcija F *definisana i diferencijabilna* nad I za koju važi

  $$F'(x) = f(x) \text{ za svako } x \text{ iz } I$$

  zove se PRIMITIVNA FUNKCIJA za funkciju f nad I.

PRIMITIVNA FUNKCIJA

- Na primer, neka je $f(x) = x^2$.
  - U ovom slučaju nije teško otkriti funkciju čiji je izvod upravo funkcija f, pošto znamo izvod stepene funkcije.
  - Sledi da za $F(x) = ⅓\, x^3$, imamo $F'(x) = x^2 = f(x)$ za svako x iz R.

PRIMITIVNA FUNKCIJA

- Međutim, treba uočiti da i funkcija $G(x) = \frac{1}{3} x^3 + 100$ takođe zadovoljava uslov $G'(x) = x^2$ za sve x iz R.
  - Obe funkcije F i G su primitivne funkcije za f na R.
  - Dakle, ako su F i G dve primitivne funkcije za f na I, onda se one nad tim intervalom razlikuju (samo) za konstantu.

PRIMITIVNA FUNKCIJA

- Zapravo, svaka funkcija oblika

$$H(x) = \tfrac{1}{3}\, x^3 + \mathrm{C},$$

gde je C konstanta, je primitivna funkcija za f na R.

NEODREĐENI INTEGRAL

- **DEFINICIJA**:

Neka je *F primitivna funkcija* za *f* na intervalu *I*. Skup svih primitivnih funkcija funkcije *f* na *I* se zove NEODREĐENI INTEGRAL funkcije *f* na *I* i označava sa $\int f(x)dx$.

Dakle, $\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C \in R\}$ ili kraće zapisano

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

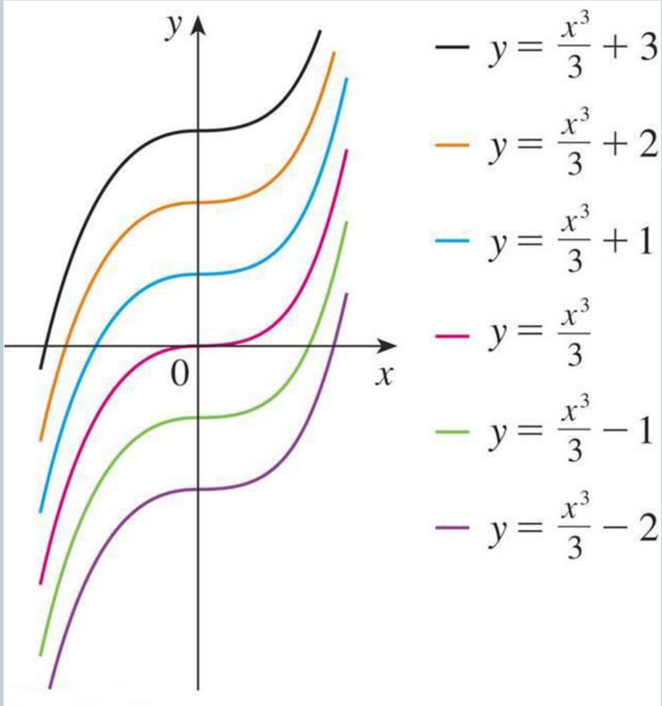
NEODREĐENI INTEGRAL

- Za funkciju $f(x) = x^2$ koju smo posmatrali na početku, imamo da je njen neodređeni integral jednak $\frac{1}{3} x^3 + C$, tj.

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

FAMILIJA FUNKCIJA

- C prolazi kroz ceo skup realnih brojeva, tako da je neodređeni integral zapravo familija funkcija.
  - Grafici svih tih funkcija su vertikalno translirani jedan u odnosu na drugi.
  - Ova činjenica se slaže sa tim da svaka od tih krivih mora imati isti nagib za svaku vrednost x.



NEODREĐENI INTEGRAL

Primer 1

- Naći neodređeni integral sledećih funkcija.

a. $f(x) = \sin x$

b. $f(x) = 1/x$

c. $f(x) = x^n,\ n \neq -1$

NEODREĐENI INTEGRAL

Primer 1a

- Ako je F(x) = - cos x, onda važi $F'(x) = \sin x$.
  - Dakle, primitivna funkcija od sin x na R je - cos x.
  - Onda je : $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Primer 1b

- Znamo da važi

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

  - Dakle, na intervalu (0, ∞), imamo da je

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

Primer 1b

- Znamo takođe da važi i

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

za svako $x \neq 0$.

  - Tako da sledi da je za sve $x \neq 0$ važi

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

NEODREĐENI INTEGRAL

Primer 1c

- Znamo da za $n \neq -1$ važi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{(n+1)x^{n}}{n+1}=x^{n}$$

NEODREĐENI INTEGRAL

Primer 1c

- Tako da je: $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
  - Ovo važi za $n \geq 0$ pošto je funkcija $f(x) = x^n$ defisana na proizvoljnom intervalu.
  - Ako je n negativno (ali $n \neq -1$), onda ovo važi na proizvoljnom intervalu koji ne sadrži 0.

NEODREĐENI INTEGRAL

- Kao što smo videli na prethodnim primerima, tablica izvoda elementarnih funkcija nam daje tablicu neodređenih integrala nekih funkcija.

Primer 2

- Naći sve funkcije *g* za koje važi

$$g'(x) = 4\sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

NEODREĐENI INTEGRAL

Primer 2

- Prvo ovu funkciju treba drugačije zapisati:

$$g'(x) = 4\sin x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4\sin x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

  - Tako da se zapravo traži neodređeni intagral funkcije:

$$g'(x) = 4\sin x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

NEODREĐENI INTEGRAL

Primer 2

- Uz pomoć tablice neodređenih integrala dobija se:

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -4\cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$