Metod smene u neodređenom integralu

METOD SMENE

Tablica (osnovnih) integrala se koristi za integraciju izvesnog broja funkcija, ali ona ne sadrži odgovor na pitanje kako, na primer, rešiti integral

(1)
$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

METOD SMENE

Da bi se mogao rešiti ovaj integral, mora se koristiti nova taktika:

- Uvodi se nova promenljiva.
- Smenjuje se promenljiva x sa novom promenljivom u.

METOD SMENE

Ako se stavi da je u veličina pod korenom u (1), $u(x) = 1 + x^2$

- Onda se diferenciranjem u dobija $du = 2x\, dx$.

METOD SMENE

Tako da se formalno, bez provere, može pisati:

(2)

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

METOD SMENE

Međutim, sada se može proveriti da li je rezultat tačan pomoću pravila za izvod složene funkcije. Diferenciranjem poslednjeg izraza u (2) dobija se:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C\right]=\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x$$

$$=2x\sqrt{x^2+1}$$

METOD SMENE

U opštem slučaju, metod smene se može primeniti u svakoj situaciji u kojoj se integral može napisati u obliku

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

METOD SMENE

Treba uočiti da ako označimo sa $F' = f$, onda na osnovu pravila za izvod složene funkcije

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = F'(g(x))g'(x)$$

važi

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \qquad (3)$$

METOD SMENE

Ako uvedemo smenu promenljive $u = g(x)$, iz (3) sledi:

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

$$= F(u) + C$$

$$= \int F'(u)\,du$$

METOD SMENE

Kako je $F' = f$, dobija se:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

- Tako je pokazano sledeće tvrđenje.

METOD SMENE

Teorema

Ako je $u = g(x)$ diferencijabilna funkcija čiji skup slika je interval I i ako je f neprekidna funkcija na I, onda važi

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \qquad (4)$$

METOD SMENE

Kao što smo već videli, metod smene je posledica pravila za izvod složene funkcije.

Treba uočiti da ako je $u = g(x)$, onda važi $du = g'(x)\,dx$.

- Tako da se metod smene lakše uvodi/pamti ako se o dx i du u (4) misli kao o diferencijalima.

METOD SMENE

Primer 1

Naći $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$

- Uvodi se smena $u = x^4 + 2$.
- Ovo se radi upravo zato što je $du = 4x^3\, dx$, a taj izraz je, osim konstante 4, deo podintegralne funkcije.

METOD SMENE

Primer 1

Tako da koristeći da je $x^3\,dx = du/4$ i uvodeći smenu, dobijamo:

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx = \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u \cdot du$$

$$= \tfrac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \tfrac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

- Smena se na kraju mora vratiti da bi konačan rezultat bio izraz u kome figuriše polazna promenljiva x.

METOD SMENE

Ideja kod smene promenljivih je da se relativno komplikovani integral zameni jednostavnijim.

- To se postiže zamenom originalne promenljive x sa novom promenljivom u koja je funkcija od x.
- Tako je u Primeru 1, integral $\int x^3\cos(x^4 + 2)\, dx$ zamenjen jednostavnijim, tabličnim integralom $\frac{1}{4} \int \cos u \, du$.

METOD SMENE

Glavni izazov kod ovog metoda je odabir prave smene.

- Novu promenljivu u treba odabrati tako da to bude deo podintegralne funkcije, ali tako da se i njen diferencijal do na konstantu takođe pojavljuje pod integralom.
- Tako se postupalo u Primeru 1.

METOD SMENE

Ako to nije moguće, treba pokušati sa tim da je u neki “komplikovani” deo podintegralne funkcije—npr. “unutrašnja” funkcija kod složene funkcije.

METOD SMENE

Pronalaženje odgovarajuće smene je stvar iskustva i vežbanja u tome…

- Neka vas ne obeshrabri prvi neuspeh, koji i nije nešto što se retko dešava.
- Ako prvi pokušaj ne uspe, pokušajte sa drugačijom smenom.

Primer 2

Izračunati

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx$$

- Neka je $u = 2x + 1$.
- Tada, $du = 2\,dx$.
- Dakle, $dx = du/2$.

METOD SMENE

Primer 2

- Metodom smene se dobija:

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}du$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}+C$$

$$= \tfrac{1}{3}u^{3/2}+C$$

$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}+C$$

Primer 2

U ovom primeru se mogla uvesti i ovakva smena:

$$u = \sqrt{2x+1}$$

Tada, $du = \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

tj. $dx = \sqrt{2x+1}\,du$

$$dx = u\,du$$

- Do toga se može doći i na osnovu: $u^2 = 2x + 1$.
- Iz čega sledi: $2u\,du = 2\,dx$.

Primer 2

Tako se dobija:

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int u \cdot u\, du$$

$$= \int u^2\, du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

Primer 3

Naći $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

- Uvodi se smena $u = 1 - 4x^2$.
- Tada, $du = -8x\,dx$.
- Dakle, $x\,dx = -1/8\,du$ i važi

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

METOD SMENE

Rezultat se uvek može proveriti diferenciranjem!

Primer 4

Izračunati $\int e^{5x}\,dx$

- Ako se stavi $u = 5x$, tada $du = 5\,dx$.
- Dakle, $dx = 1/5\,du$.
- Stoga sledi,

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{u}du$$

$$= \frac{1}{5}e^{u} + C$$

$$= \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

METOD SMENE

Primer 5

Naći
$$\int \sqrt{1+x^2}\,x^5\,dx$$

- Odgovarajuća smena postaje očiglednija kada činilac x^5 napišemo u obliku $x^4 \cdot x$.
- Neka je $u = 1 + x^2$.
- Tada, $du = 2x\,dx$.
- Dakle, $x\,dx = du/2$.

METOD SMENE

Primer 5

Takođe, $x^2 = u - 1$; pa imamo $x^4 = (u-1)^2$:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,x^5\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,x^4 \cdot x\,dx = \int \sqrt{u}\,(u-1)^2\,\frac{du}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2\cdot\tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

Primer 6

Izračunati $\int \operatorname{tg} x \, dx$

- Prvo se tangens napiše preko sinusne i kosinusne funkcije:
$$\int \operatorname{tg} x = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
- Ovaj zapis upućuje na smenu $u = \cos x$, pošto je tada $du = -\sin x \, dx$, tako da sledi $\sin x \, dx = -du$:

$$\int \operatorname{tg} x = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u}$$
$$= -\ln |u| + C$$
$$= -\ln |\cos x| + C$$

METOD SMENE

Primer 5

Kako je $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1})$
$= \ln(1/|\cos x|)$,

Dakle, rezultat se može napisati i u obliku

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln(1/|\cos x|) + C$$