TEHNIKE INTEGRACIJE

Integracija je komplikovanija od diferenciranja za koje imamo tablicu i pravila.

- Ne postoji pravilo koje nam garantuje da ćemo moći da izračunamo neodređeni integral neke funkcije.
- Neke tehnike/strategije ćemo rezimirati na narednim časovima.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

u neodređenom integralu

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Svako pravilo diferenciranja ima odgovarajuće pravilo za integraciju.

- Videli smo već da smena promenljivih odgovara izvodu složene funkcije.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Pravilo koje odgovara pravilu za izvod proizvoda dve funkcije se zove parcijalna integracija.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Pravilo za izvod proizvoda dve diferecijabilne funkcije f i g glasi:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Ako se taj izraz integrali dobija se

$$\int \left[f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \right] dx = f(x)g(x)$$

tj.

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Ako se drugi sabirak napiše na drugoj strani jednakosti, dobija se:

(1) $$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

(1) se zove formula za parcijalnu integraciju.

- Lakše se pamti u sledećoj notaciji.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Neka je $u = f(x)$ i $v = g(x)$.

- Tada se diferenciranjem dobija:

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{i} \quad dv = g'(x)\,dx$$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Dakle, posle uvođenja smene, formula za parcijalnu integraciju glasi:

(2) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 1

Naći $\int x \sin x \, dx$.

- Ako se izabere $f(x) = x$ i $g'(x) = \sin x$.
- Tada je $f'(x) = 1$ i $g(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$.
- Dakle g je bilo koja primitivna funkcija od g'.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 1

Koristeći formulu (1), dobija se:

$$\int x\sin x\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

$$= x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

- Uvek je preporučljivo proveriti rezultat diferenciranjem.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 1

Neka je $u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

Tada, $du = dx \qquad v = -\cos x$

Koristeći formulu (2), dobija se:

$$\int x \sin x\,dx = \int \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\sin x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\,\overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

NAPOMENA

Kada se primenjuje metoda parcijalne integracije cilj je da se u sledećem koraku dobije jednostavniji integral od polaznog.

- Tako se u Primeru 1 polazni integral $\int x \sin x \, dx$ sveo na rešavanje jednostavnijeg integrala $\int \cos x \, dx$.

NAPOMENA

Primer 1

Da smo izabrali $u = \sin x$ i $dv = x\,dx$, onda bi bilo $du = \cos x\,dx$ i $v = x^2/2$.

Dakle, parcijalna integracija bi dala sledeći integral:

$$\int x \sin x\,dx = (\sin x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos dx$$

- Iako je i ovaj izraz tačan, integral $\int x^2 \cos x\,dx$ je mnogo teži za rešavanje od polaznog, tako da ovakav izbor nema smisla.

NAPOMENA

Dakle, kada se biraju u i dv, obično se trudimo da funkcija $u = f(x)$ bude funkcija koja postaje jednostavnija diferenciranjem.

- Ili bar da ne bude mnogo komplikovanija.

- Međutim, pri izboru ovih funkcija svakako treba imati u vidu da funkciju $dv = g'(x)\,dx$ treba integraliti da bi se dobilo v.

Primer 2

Izračunati $\int \ln x \, dx$.

- U ovom slučaju nema dileme šta treba da bude u a šta dv.
- Stavimo $u = \ln x \qquad dv = dx$
- Tada je $du = \dfrac{1}{x} dx \qquad v = x$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 2

Parcijalnom integracijom se dobija:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 2

Parcijalna integracija ovde daje rezultat jer je izvod funkcije $f(x) = \ln x$ jednostavniji od same funkcije f.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 3

Naći $\int t^2 e^t dt$.

- Treba uočiti da funkcija t^2 postaje jednostavnija diferenciranjem.
- A da funkcija e^t ostaje nepromenjena i diferenciranjem i integracijom.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 3

Dakle, bira se $u = t^2 \quad dv = e^t dt$

Tada, $du = 2t\,dt \qquad v = e^t$

Parcijalnom integracijom se dobija:

(3) $$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int t e^t dt$$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 3

Integral koji je dobijen, $\int te^t dt$, je jednostavniji od polaznog integrala.

Međutim, i dalje nije tablični integral za koji znamo rešenje.

- Tako da parcijalnu integraciju treba primeniti još jednom.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 3

Sada se stavi

$$u = t \ \text{ i } \ dv = e^t dt$$

- Tako da sledi $du = dt$ i $v = e^t$.
- Dakle,

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt - te^t - e^t + C$$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 3

Zamenjujući ovaj rezultat u (3), dobija se

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int te^t dt$$

$$= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C)$$

$$= t^2 e^t - 2te^t - 2e^t + C_1$$

gde je $C_1 = -2C$.

Primer 4

Izračunati $\int e^x \sin x \, dx$.

- Funkcija e^x ne postaje jednostavnija diferenciranjem.
- Ali ni $\sin x$ ne postaje jednostavniji diferenciranjem.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 4

Bez obzira na to, ovaj integral ćemo pokušati da rešimo parcijalnom integracijom stavljajući da su

$$u = e^x \text{ i } dv = \sin x$$

- Tada važi $du = e^x\, dx$ i $v = -\cos x$.

Primer 4

Dakle, parcijalnom integracijom se dobija:

(4) $\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 4

Integral koji se dobija, $\int e^x \cos x \, dx$, nije jednostavniji od polaznog.

- Ali nije ni komplikovaniji…
- Kao i u prethodnom primeru, pokušaćemo da primenimo parcijalnu integraciju još jednom.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Ovog puta stavljamo

$$u = e^x \text{ i } dv = \cos x \, dx$$

Tada su $du = e^x \, dx$, $v = \sin x$ i

(5) $\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$

Primer 4

Na prvi pogled se može učiniti da ništa nije postignuto.

- Dobili smo integral $\int e^x \sin x \, dx$, koji smo imali i na početku.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 4

Međutim, ako se izraz za $\int e^x \cos x \, dx$ iz (5) stavi u (4), dobija se:

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

- Ovaj izraz se sada može posmatrati kao jednačina koju treba rešiti po nepoznatom integralu.

PARCIJALNA INTEGRACIJA

Primer 4

Dodavanjem $\int e^x \sin x\,dx$ na obe strane jednakosti, dobija se:

$$2\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

Primer 4

Deljenjem sa 2 i dodavanjem integracione konstante, dobija se:

$$\int e^x \sin x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$