

NEODREĐENI INTEGRAL



Integracija racionalnih funkcija

PARCIJALNI RAZLOMCI



- U ovom delu ćemo videti da se integracija proizvoljne racionalne funkcije (količnika dva polinoma) radi tako što se prvo racionalna funkcija izrazi preko zbira jednostavnijih funkcija koje zovemo *parcijalni razlomci*.
- Od ranije nam je poznato kako se integrale parcijalni razlomci.

INTEGRACIJA PARCIJALNIH RAZLOMAKA



- Na primer, uočimo da se sabiranjem razlomaka $2/(x - 1)$ i $1/(x - 2)$, tj. njihovim dovođenjem na zajednički imenilac, dobija:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} &= \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{x+5}{x^2+x-2}\end{aligned}$$

INTEGRACIJA PARCIJALNIH RAZLOMAKA



- Ako se ta procedura obrne, može se videti kako se integrali funkcija sa desne strane ove jednakosti:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$
$$= 2 \ln |x-1| - \ln |x+2| + C$$

INTEGRACIJA PARCIJALNIH RAZLOMAKA



- Sada ćemo predstaviti rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne razlomke. Neka je data racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

gde su P i Q dva polinoma.

PRAVA RACIONALNA FUNKCIJA



- Funkcija f se može izraziti kao suma jednostavnijih razlomaka ako je stepen polinoma P strogo manji od stepena polinoma Q .
- Takva racionalna funkcija se zove *prava racionalna funkcija*.

STEPEN POLINOMA P



- Podsetimo se, za polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gde je $a_n \neq 0$, n se naziva stepenom polinoma P
i označava sa $st(P) = n$.

PARCIJALNI RAZLOMCI



- Ako f nije prava racionalna funkcija, tj. ako je $st(P) \geq st(Q)$, onda je **prvi korak** u proceduri deljenje polinoma P polinomom Q .
- Podsetimo se, deljenje se radi sve dok se ne dobije da je stepen polinoma ostatka $R(x)$ takav da je $st(R) < st(Q)$.

PARCIJALNI RAZLOMCI



- U ovom slučaju, deljenjem se dobija

$$(1) \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

gde su S i R takođe polinomi i $\text{st}(R) < \text{st}(Q)$. $S(x)$ je polinom količnik, a $R(x)$ je ostatak.

PARCIJALNI RAZLOMCI



- Ponekad se može desiti da je taj prvi korak, deljenje polinoma, jedino što je potrebno uraditi. To će se videti u narednom primeru.



● Naći

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$

- Stepen polinoma u brojiocu je veći od stepena polinoma u imeniocu.
- Dakle, prvo se ova dva polinoma podele.



○ Deljenjem ovaj izraz postaje:

$$\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1} \right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x-1| + C$$

PARCIJALNI RAZLOMCI



- **Sledeći korak** je faktORIZACIJA imenioca $Q(x)$.

FAKTORIZACIJA $Q(x)$



- Podsećanje. Može se pokazati da se svaki polinom Q može faktorirati nad R pomoću:
 - Linearnih faktora/činilaca (oblika $ax + b$)
 - Nesvodljivih kvadratnih faktora (oblika $ax^2 + bx + c$, gde je $b^2 - 4ac < 0$).

FAKTORIZACIJA $Q(x)$



- Na primer, ako je $Q(x) = x^4 - 16$, ovaj izraz se faktoriše na sledeći način:

$$\begin{aligned}Q(x) &= (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)\end{aligned}$$

FAKTORIZACIJA $Q(x)$



- **Treći korak** je predstavljanje prave racionalne funkcije $R(x)/Q(x)$ kao sume parcijalnih razlomaka oblika:

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \quad \text{ili} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$$

FAKTORIZACIJA $Q(x)$



- Teorema iz algebre garantuje da se ovo uvek može uraditi.
- Procedura će biti detaljno objašnjena kroz četiri slučaja koja se mogu desiti.

SLUČAJ 1



- Imenilac $Q(x)$ je proizvod različitih linearnih faktora.

SLUČAJ 1



- To znači da se $Q(x)$ može napisati u obliku:

$$Q(x) = (a_1x + b_1) (a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

gde se ni jedan od činilaca (faktora) *ne ponavlja* niti je jednak nekom drugom činiocu pomnoženom sa konstantom.

SLUČAJ 1



- U ovom slučaju, teorema o parcijalnim razlomcima kaže da moraju postojati konstante A_1, A_2, \dots, A_k takve da važi:

$$(2) \quad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

SLUČAJ 1



- Nepoznate konstante se određuju izjednačavanjem koeficijenata, kao u sledećem primeru.



- Izračunati

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$

- Stepen polinoma u brojiocu je manji od stepena polinoma u imeniocu.
- Ova dva polinoma se ne mogu podeliti.



- Imenilac se faktoriše:

$$\begin{aligned}2x^3 + 3x^2 - 2x &= x(2x^2 + 3x - 2) \\ &= x(2x - 1)(x + 2)\end{aligned}$$

- Faktorizacija sadrži tri različita činioca.

SLUČAJ 1



- Dakle, rastavljanje na parcijalne razlomke imenioca podintegralne funkcije (2) ima oblik

$$(3) \quad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

SLUČAJ 1



- Da bi se odredile konstante A , B i C , jednačina se pomnoži sa proizvodom koji se nalazi u imeniocu $x(2x - 1)(x + 2)$:

$$(4) \quad x^2 + 2x + 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

SLUČAJ 1



- Množenjem činilaca na desnoj strani jednačine (4), a zatim njihovim grupisanjem po stepenima od x dobija se:

$$(5) \quad x^2 + 2x + 1 = (2A + B + 2C)x^2 \\ + (3A + 2B - C)x - 2A$$



- Polinomi u (5) treba da budu jednaki za svako x .
- Dakle, njihovi koeficijenti moraju biti isti.
 - Koeficijent uz x^2 na desnoj strani: $2A + B + 2C$, mora biti jednak koeficijentu uz x^2 na levoj strani: 1.
 - Analogno važi i za koeficijente uz x i slobodne koeficijente, tj. konstante.



- Tako se dobija sistem linearnih jednačina po nepoznatima A , B i C :

$$2A + B + 2C = 1$$

$$3A + 2B - C = 2$$

$$-2A = -1$$



- Rešenje sistema:

- $A = 1/2$

- $B = 1/5$

- $C = -1/10$

- Dakle,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10} \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{10} \ln |2x-1| - \frac{1}{10} \ln |x+2| + K \end{aligned}$$



- Napomena:

Pri integraciji drugog sabirka, potrebno je staviti smenu $u = 2x - 1$, koja daje $du = 2 dx$ i $dx = du/2$.



• Naći $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, gde je $a \neq 0$.

○ Rastavljanjem na parcijalne razlomke se dobija:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

○ Sledi,

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$



- Rešavanjem sistema koje se dobija izjednačavanjem koeficijenata, dobija se rešenje:

- $A = 1/(2a)$

- $B = -1/(2a)$



- Dakle,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + C$$

SLUČAJ 1



- Kako važi $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, rešenje se može napisati u obliku:

$$(6) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

SLUČAJ 2



- $Q(x)$ je proizvod linearnih činilaca, od kojih se neki ponavljaju.

SLUČAJ 2



- Pretpostavimo da se činilac $(a_1x + b_1)$ ponavlja r puta.
 - Dakle, $(a_1x + b_1)^r$ je činilac faktORIZACIJE polinoma $Q(x)$.

SLUČAJ 2



- Tada umesto jednog sabirka $A_1/(a_1x + b_1)$ u (2) treba da bude r sabiraka oblika:

$$(7) \quad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

SLUČAJ 2



- Na primer:

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

- Detaljno će biti urađen sledeći, jednostavniji, primer.



• Naći $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

○ Prvi korak je deljenje:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

○ Rezultat deljenja je:

$$= x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$



- Drugi korak je faktorizacija polinoma koji se nalazi u imeniocu

$$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

- Kako je $Q(1) = 0$, znamo da je $x - 1$ jedan činilac u faktorizaciji, tako da dobijamo:

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - x + 1 &= (x - 1)(x^2 - 1) \\ &= (x - 1)(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 1)\end{aligned}$$



- Linearni faktor $x - 1$ se pojavljuje dva puta.
- Dakle, rastavljanje na parcijalne razlomke ima oblik:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$



- Množenjem sa najmanjim zajedničkim sadržiocem, $(x - 1)^2 (x + 1)$, dobija se:

$$(8) \quad 4x = A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 \\ = (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C)$$



- Sada se koeficijenti uz iste stepene izjednače :

$$A + C = 0$$

$$B - 2C = 4$$

$$-A + B + C = 0$$



- Rešavanjem sistema dobija se:
 - $A = 1$
 - $B = 2$
 - $C = -1$

INTEGRACIJA PARCIJALNIH RAZLOMAKA

Primer 4

• Dakle,

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

$$= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln |x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln |x+1| + K$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + K$$

SLUČAJ 3



- Faktorizacija polinoma $Q(x)$ sadrži nesvodljive kvadratne činioce od kojih se nijedan ne ponavlja.

SLUČAJ 3



- Ako $Q(x)$ ima činilac $ax^2 + bx + c$, gde je $b^2 - 4ac < 0$, pored parcijalnih razlomaka iz (2) i (7), izraz za $R(x)/Q(x)$ će imati sabirak oblika

$$(9) \quad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

gde su A i B konstante koje treba odrediti.

SLUČAJ 3



- Na primer, funkcija $f(x) = x/[(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)]$ se rastavlja na parcijalne razlomke na sledeći način:

$$\frac{x}{(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

SLUČAJ 3



- Sabirak iz (9) se integrali svođenjem na potpun kvadrat binoma, a zatim pomoću tabličnog integrala

$$(10) \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$



• Izračunati $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

- Kako je $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ i ne može se dalje faktorirati, sledi:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$



- Množenjem sa $x(x^2 + 4)$, dobija se:

$$\begin{aligned}2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A\end{aligned}$$



- Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene dobija se sistem linearnih jednačina:

$$A + B = 2 \quad C = -1 \quad 4A = 4$$

- Dakle, $A = 1$, $B = 1$ i $C = -1$.



- Dakle,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2 + 4} \right) dx$$



- Za integraciju drugog sabirka, potrebno ga je razdvojiti na dva razlomka:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4} dx = \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx$$



- Za prvi integral se koristi smena $u = x^2 + 4$, tako da je $du = 2x dx$.



- Drugi integral se rešava pomoću tabličnog integrala (10) sa $a = 2$:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{xdx}{x^2 + 4} - \int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$= \ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$



- Izračunati

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$$

- Stepen polinoma u brojiocu nije strogo manja od stepena polinoma koji se nalazi u imeniocu.

- Dakle, prvo ih treba podeliti:

$$\begin{aligned} & \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} \\ &= 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3} \end{aligned}$$



- Treba uočiti da je faktor $4x^2 - 4x + 3$ nesvodljiv, jer je njegova diskriminanta $b^2 - 4ac = -32 < 0$.
 - To znači da se on ne može dalje faktorisati nad R .
 - Dakle, ovde dalje nije potrebno rastavljanje na parcijalne razlomke.



- Za integraciju ove funkcije, dopunićemo do potpunog kvadrata binoma funkciju iz imenioca:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

- Ovo upućuje na smenu: $u = 2x - 1$.
- Dakle, $du = 2 dx$, i $x = \frac{1}{2}(u + 1)$.

- Dalje,

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{x-1}{4x^2 - 4x + 3} \right) dx$$

$$= x + \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(u+1) - 1}{u^2 + 2} du$$

$$= x + \frac{1}{4} \int \frac{u-1}{u^2 + 2} du$$



$$\begin{aligned} &= x + \frac{1}{4} \int \frac{u}{u^2 + 2} du - \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 + 2} du \\ &= x + \frac{1}{8} \ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= x + \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}} \right) + C \end{aligned}$$

Oznaka: $\tan^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$

NAPOMENA



- Primer 6 ilustruje opšte pravilo za integraciju parcijalnog razlomka oblika

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \quad \text{gde je} \quad b^2 - 4ac < 0$$

NAPOMENA



- Imenilac se dopuni do potpunog kvadrata, uvede se smena i dobije integral oblika

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2} du = C \int \frac{u}{u^2 + a^2} du + D \int \frac{1}{u^2 + a^2} du$$

- Tada je prvi integral logaritam, a drugi se izražava preko funkcije arkustangens.

SLUČAJ 4



- $Q(x)$ sadrži nesvodljive kvadratne faktore koji se ponavljaju.

SLUČAJ 4



- Pretpostavimo da $Q(x)$ ima činilac

$$(ax^2 + bx + c)^r$$

gde je $b^2 - 4ac < 0$.

SLUČAJ 4



- Tada, umesto jednog parcijalnog razlomka (9), imamo zbir

$$(11) \quad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

koji se pojavljuje u rastavljanju na parcijalne razlomke funkcije $R(x)/Q(x)$.

SLUČAJ 4



- Svaki od sabiraka u (11) se integrali dopunjavanjem do potpunog kvadrata u imeniocu.



- Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka funkciju:

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$



- Imamo:

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$$
$$+ \frac{Gx + h}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^3}$$



- Izračunati

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx$$

- Rastavljanjem na parcijalne razlomke se dobija:

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$



- Množenjem sa $x(x^2 + 1)^2$, sledi:

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x$$

$$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex$$

$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$



- Izjednačavanjem koeficijenata se dobija:

$$A + B = 0$$

$$C = -1$$

$$2A + B + D = 2$$

$$C + E = -1$$

$$A = 1$$

- Rešenje sistema:

$$A = 1, B = -1, C = -1, D = 1, E = 0.$$



- Tako imamo

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \tan^{-1} x - \frac{1}{2(x^2 + 1)^2} + K$$

IZBEGAVANJE PARCIJALNIH RAZLOMAKA



- Treba napomenuti da se kod integracije ponekad može izbeći rastavljanje na parcijalne razlomke.

IZBEGAVANJE PARCIJALNIH RAZLROMAKA



- Na primer, integral

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)} dx$$

se može rešiti rastavljanjem na parcijalne razlomke (Slučaj 3).

IZBEGAVANJE PARCIJALNIH RAZLOMAKA



- Međutim, u ovom primeru je mnogo jednostavnije uočiti da ako se stavi smena $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, onda imamo $du = (3x^2 + 3) dx$ i stoga

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x| + C$$