- U definiciji određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$, za funkciju f smo pretpostavili da je definisana i **ograničena** na **ograničenom** intevalu $[a, b]$ i da na njemu ima najviše konačno mnogo tačaka prekida.

Nesvojstveni integrali

NESVOJSTVENI INTEGRAL

- U ovoj lekciji se koncept određenog integrala proširuje u slučajevima kada je:
  - interval neograničen
  - f funkcija koja nije ograničena na $[a, b]$

NESVOJSTVENI INTEGRAL

- U oba slučaja, takav integral se zove nesvojsveni integral.

  - Jedna od najvažnijih primena ove ideje je raspodela verovatnoće sa kojom ćete imati prilike da se sretnete u daljem školovanju.

NESVOJSTVENI INTEGRAL I vrste

- Posmatrajmo beskonačnu oblast S koja se nalazi:
  - Ispod krive $y = 1/x^2$
  - Iznad x-ose
  - Desno od prave $x = 1$

BESKONAČAN INTERVAL

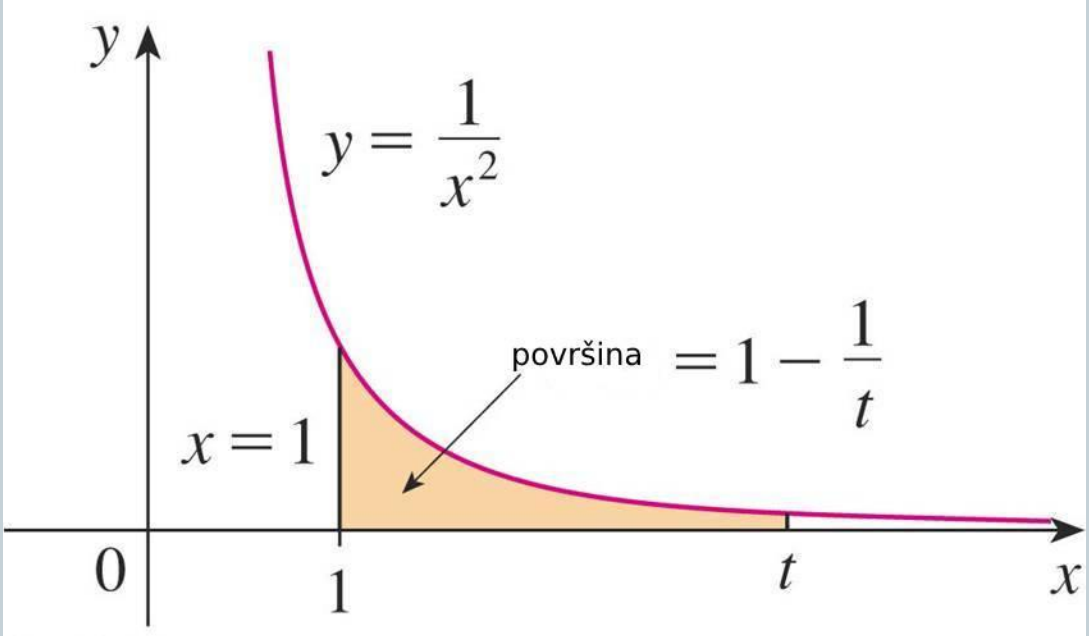
- Pošto je *S* beskonačna oblast, moglo bi se pomisliti da je i površina te oblasti beskonačna.
  - Međutim, treba pažljivije pogledati.

BESKONAČAN INTERVAL

- Površina dela oblasti S koja se nalazi levo od prave $x = t$ (osenčeni deo) je:

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

  - Primetimo da je $A(t) < 1$ bez obzira koliko veliko t se uzme.



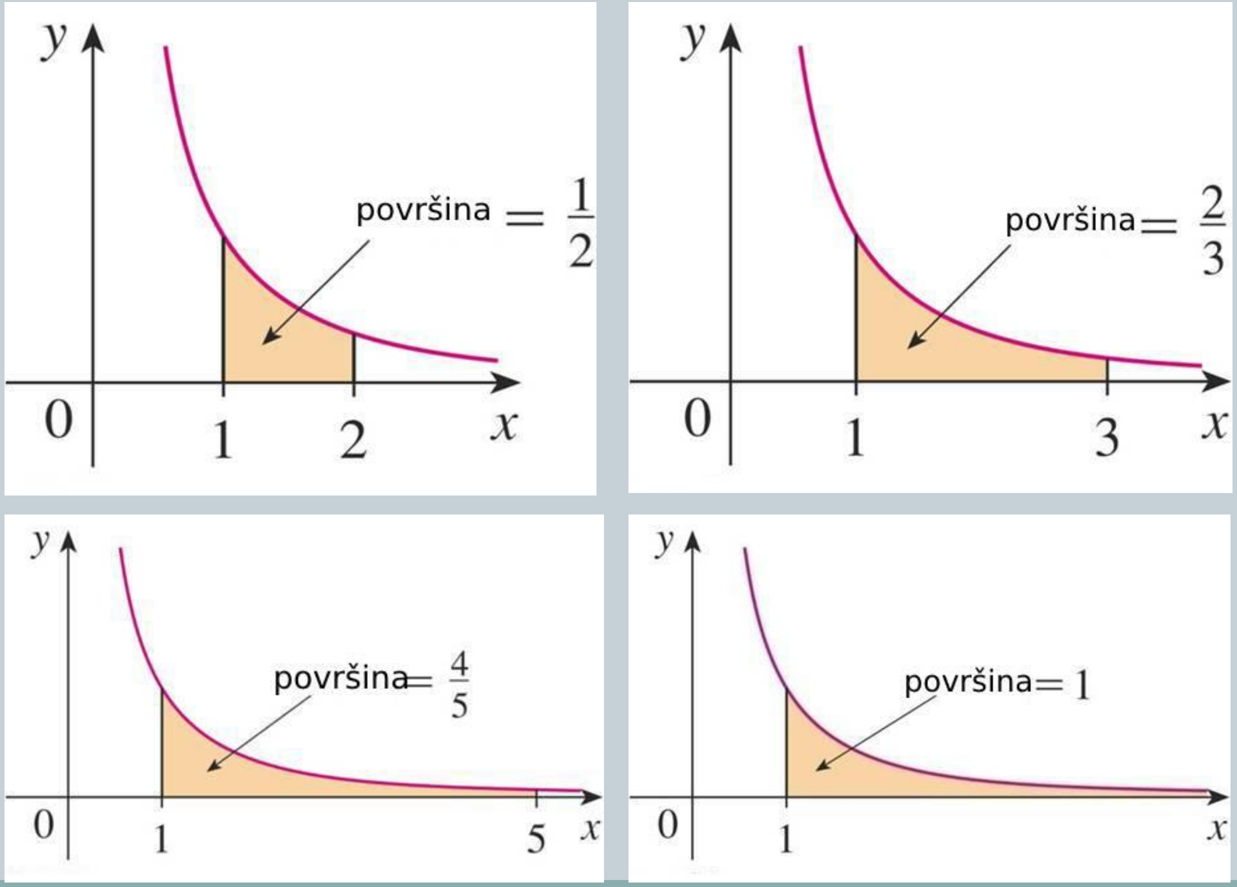
BESKONAČAN INTERVAL

- Uočimo takođe da je:

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

BESKONAČAN INTERVAL

- Tako da površina osenčene oblasti teži broju 1 kako $t \to \infty$.



BESKONAČAN INTERVAL

- U ovom slučaju, kažemo da je površina ove beskonačne oblasti *S* jednaka 1 i pišemo:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

BESKONAČAN INTERVAL

- Sledeći razmatranje iz prethodnog primera, definišemo integral funkcije f (koja ne mora biti pozitivna) nad neograničenim intervalom kao graničnu vrednost integrala nad ograničenim intervalom.

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Definicija 1a

- Ako $\int_a^t f(x)\,dx$ postoji za svaki broj $t \geq a$, onda se definiše

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Defincija 1b

- Ako $\int_t^b f(x)\,dx$ postoji za svako $t \le b$, onda se definiše

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx$$

KONVERGENCIJA I DIVERGENCIJA

- Nesvojstveni integrali $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ i $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ su
  - KONVERGENTNI ako odgovarajuće granične vrednosti postoje, tj. ako su realni brojevi.
  - DIVERGENTNI ako odgovarajući limesi ne postoje ili su ∞ (ili -∞).

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Definicija 1c

- Ako su oba integrala $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ i $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ konvergentna, onda se definiše

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

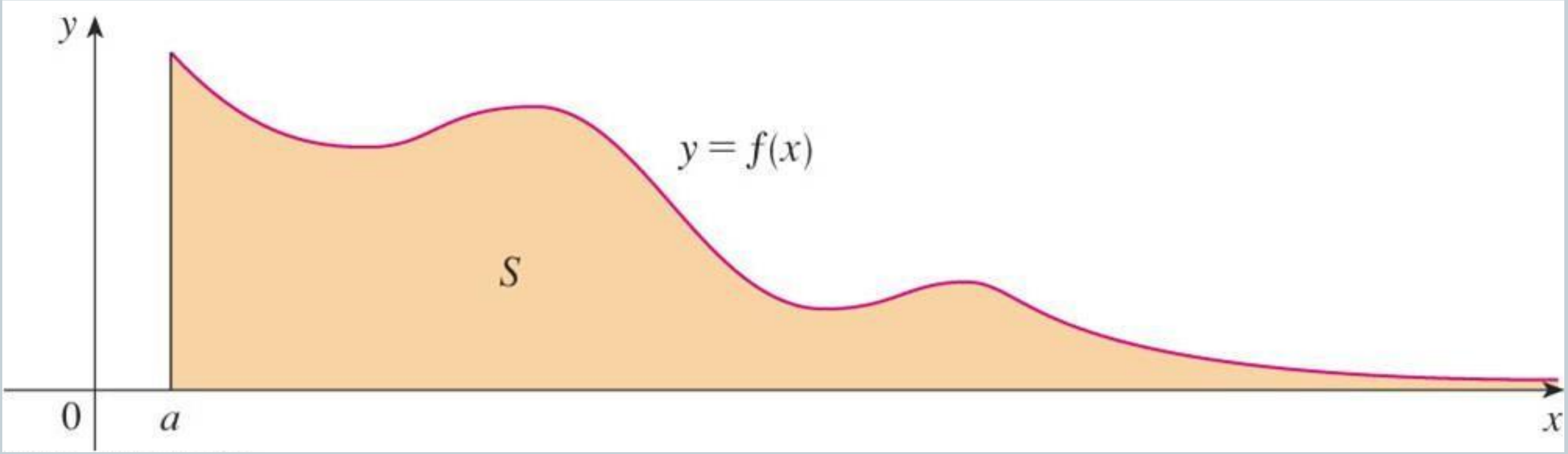
  - gde a može da bude bilo koji realan broj.

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

- Nesvojstveni integrali iz Definicije 1 se mogu interpretirati kao površina ispod krive, ako je funkcija f pozitivna.

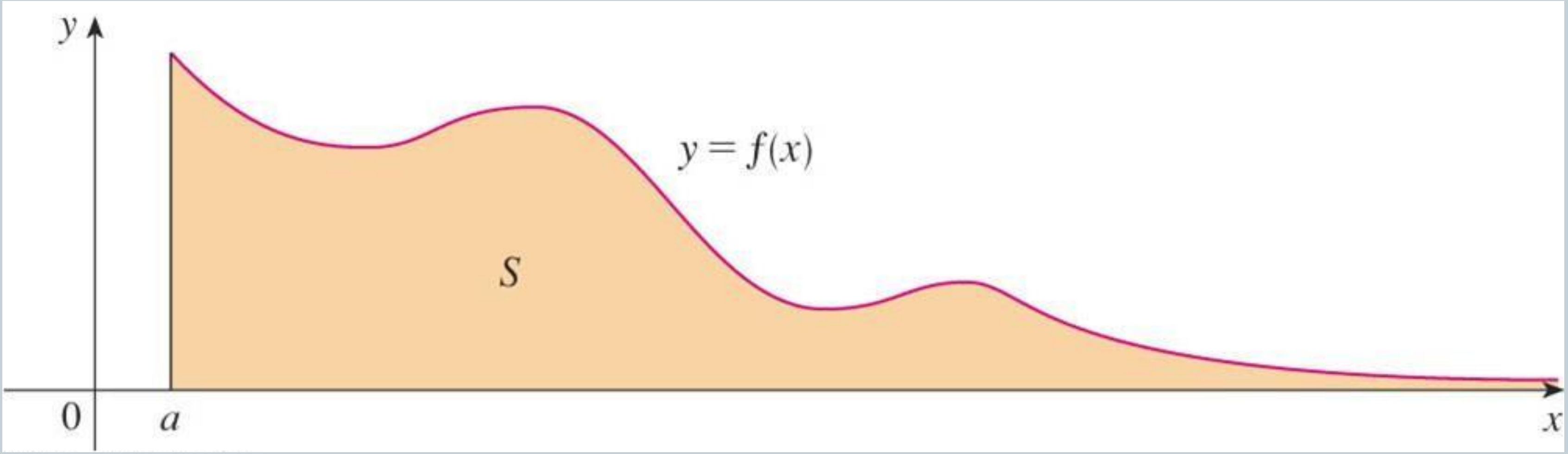
NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

- Na primer, u slučaju (a), pretpostavimo $f(x) \geq 0$ i da je integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergentan.
  - Tada se površina $S = \{(x, y) \mid x \geq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$ na slici definiše kao $A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$



NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

- Ova definicija je korektna jer je $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ granična vrednost površine ispod grafika krive f od a do t kada $t \to \infty$.



NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 1

- Odrediti da li integral

$$\int_1^{\infty} (1/x)\,dx$$

konvergira ili divergira.

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 1

- Na osnovu Definicije 1a, imamo:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln 1)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

  - Granična vrednost nije realan broj.
  - Dakle, integral je divergentan.

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

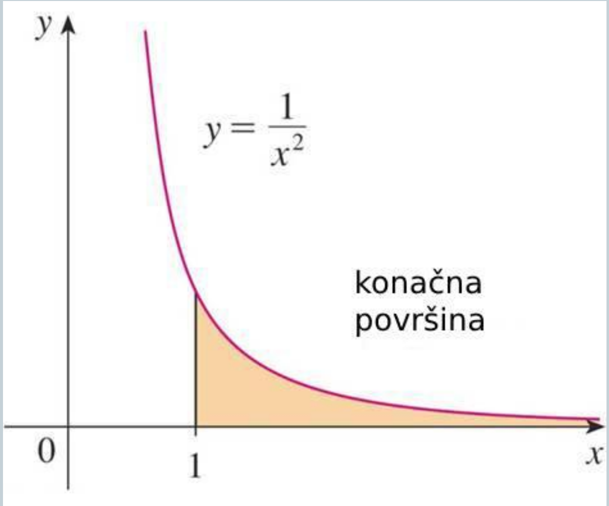
- Uporedimo rezultat Primera 1 sa primerom koji smo imali na početku:

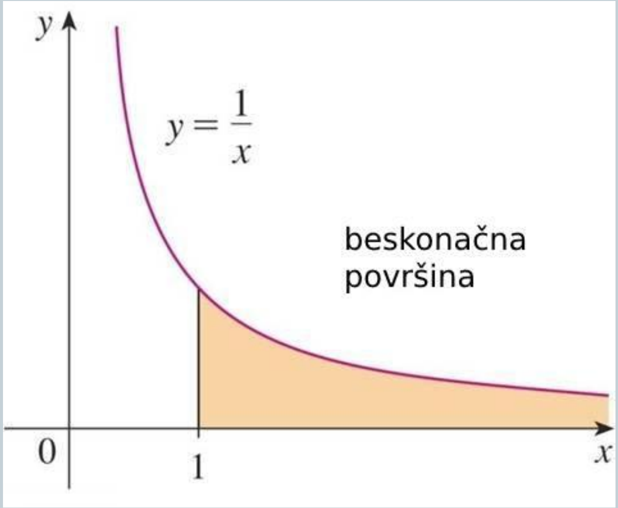
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ konvergira} \qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \text{ divergira}$$

  - Geometrijski to znači sledeće:

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

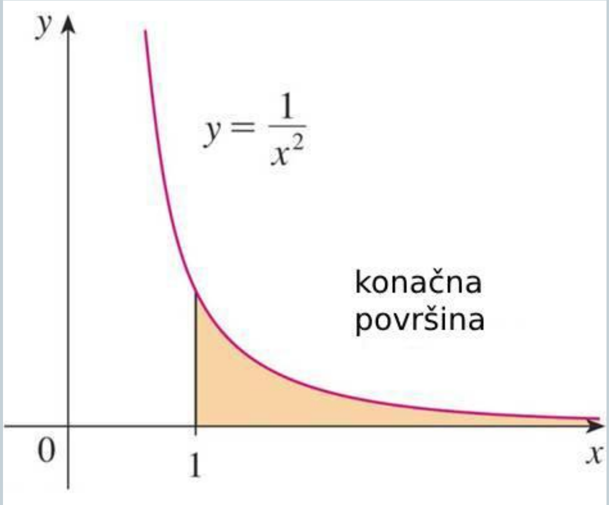
- Krive $y = 1/x^2$ i $y = 1/x$ izgledaju slično za $x > 0$.
- Međutim, površina ispod $y = 1/x^2$ desno od $x = 1$ je konačna, ali oblast ispod $y = 1/x$ ima beskonačnu površinu.

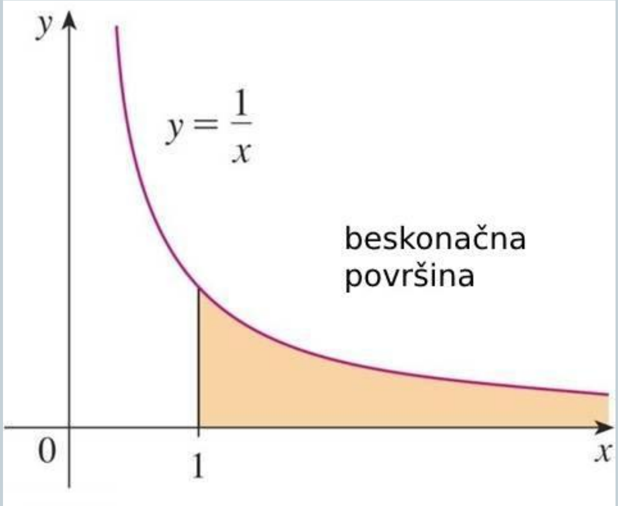




NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

- Treba uočiti da obe funkcije $1/x^2$ i $1/x$ teže 0 kako $x \to \infty$, ali $1/x^2$ teži brže nego $1/x$.
  - $1/x$ ne opada dovoljno brzo da bi njen integral imao konačnu vrednost.





NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 2

- Izračunati

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$$

  - Na osnovu Definicije 1b, imamo:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} xe^{x}\,dx$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 2

- Primenjujemo parcijalnu integraciju sa $u = x$, $dv = e^x\,dx$, tako da je $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\,dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 2

- Znamo da $e^t \rightarrow 0$ za $t \rightarrow -\infty$, tako da se primenom Lopitalovog pravila dobija:

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (-e^t)$$

$$= 0$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 2

- Stoga,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(-te^{t}-1+e^{t}\right)$$

$$=-0-1+0$$

$$=-1$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 3

- Izračunati

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

  - Obično se uzima da je $a = 0$ u Definiciji 1c:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 3

- Integrali na desnoj strani jednakosti se moraju posmatrati odvojeno.

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 3

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \tan^{-1} x \Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\tan^{-1} t - \tan^{-1} 0)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \tan^{-1} t$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \int_t^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \tan^{-1} x \Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$\tan^{-1} x = arctgx$

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 3

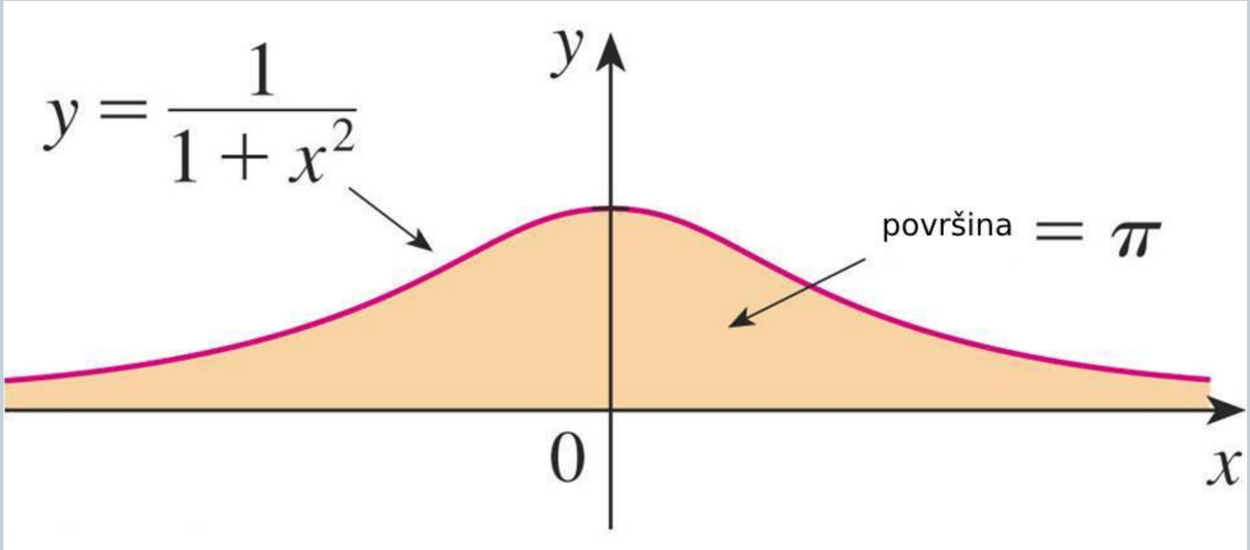
- Kako su oba integrala konvergentna, i polazni integral je konvergentan i važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 3

- Kako je $1/(1 + x^2) > 0$, dati nesvojstveni integral se može interpretirati kao površina oblasti koja se nalazi između krive $y = 1/(1 + x^2)$ i x–ose.



NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 4

- Za koje vrednosti parametra p je integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ konvergentan?
  - Na osnovu Primera 1 znamo da je za $p = 1$ ovaj integral divergentan.
  - Pretpostavimo da je $p \neq 1$.

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 4

- Tada važi,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}}-1\right]$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 4

- Ako je $p > 1$, onda $p - 1 > 0$.
- Dakle, kada $t \to \infty$, $t^{p\text{-}1} \to \infty$ i $1/t^{p\text{-}1} \to 0$.

  - Stoga, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ za p>1.
  - Dakle, integral konvergira.

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

Primer 4

- Međutim, ako je p <1, onda je $p - 1 < 0$, tj. $1 - p > 0$, pa sledi

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \quad \text{kada} \quad t \to \infty$$

  - Tako da u ovom slučaju integral divergira.

NESVOJSTVENI INTEGRAL PRVE VRSTE

- Rezultat iz Primera 4 se često koristi, dakle

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ je:
  - Konvergentan za $p > 1$
  - Divergentan za $p \leq 1$

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

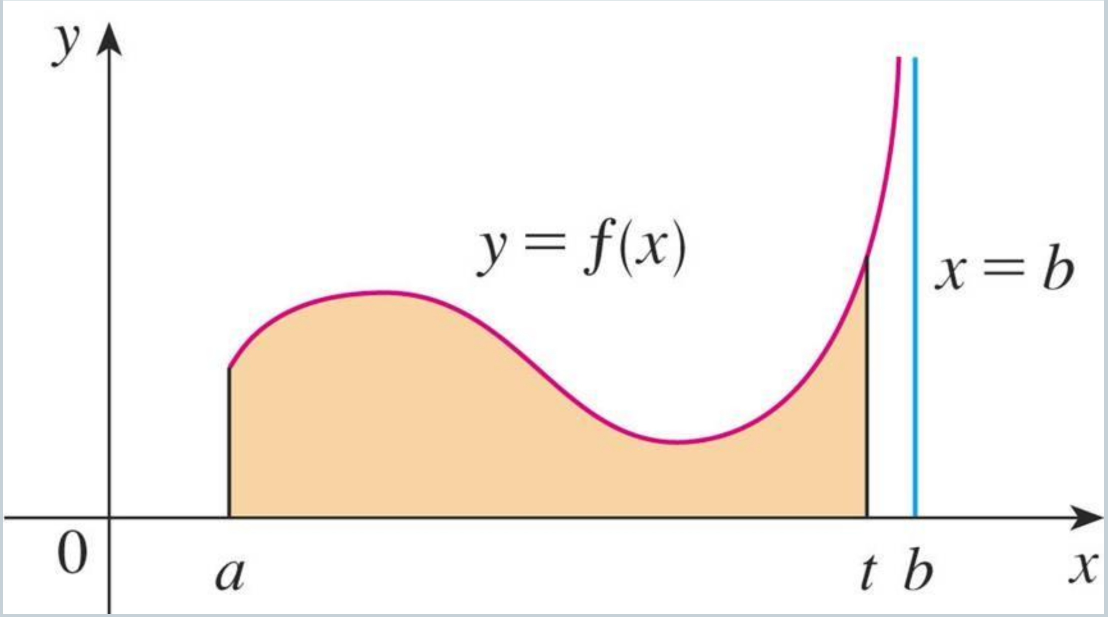
- Pretpostavimo da je f pozitivna neprekidna funkcija definisana na ograničenom intervalu $[a, b)$, ali ima vertikalnu asimptotu $x=b$.

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

- Neka je S neograničena oblast ispod grafika funkcije f, a iznad x-ose između a i b.
    - Kod nesvojstvenih integrala I vrste, oblast se neograničeno širila u horizontalnom pravcu.
    - Sada je oblast beskonačna u vertikalnom pravcu.

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

- Površina dela oblasti S između a i t (osenčeni deo) je: $A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$



NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

- Ako $A(t)$ teži konačnom broju A kada $t \to b^-$, onda kažemo da je A površina oblasti S i pišemo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Definicija 3a

- Ako je f neprekidna na $[a, b)$ i ako je $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$ (ili $-\infty$) onda se definiše

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Definicija 3b

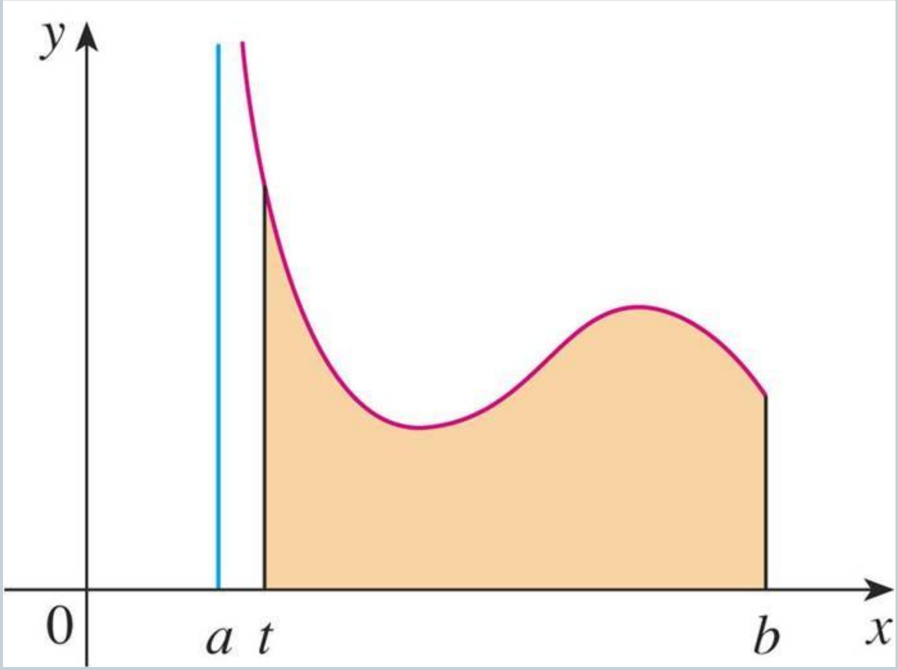
- Analogno, ako je f neprekidna funkcija na $(a, b]$ i važi $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (ili $-\infty$) onda se definiše

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Definicija 3b

- Definicija 3b je na slici ilustrovana u slučaju kada je $f(x) \geq 0$ i ima vertikalnu asimptotu u a.



NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Definicija 3b

- Nesvojstveni integral: $\int_a^b f(x)\,dx$
  - Konvergira ako odgovarajući limesi postoje kao realni brojevi.
  - Divergira ako to nije slučaj.

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

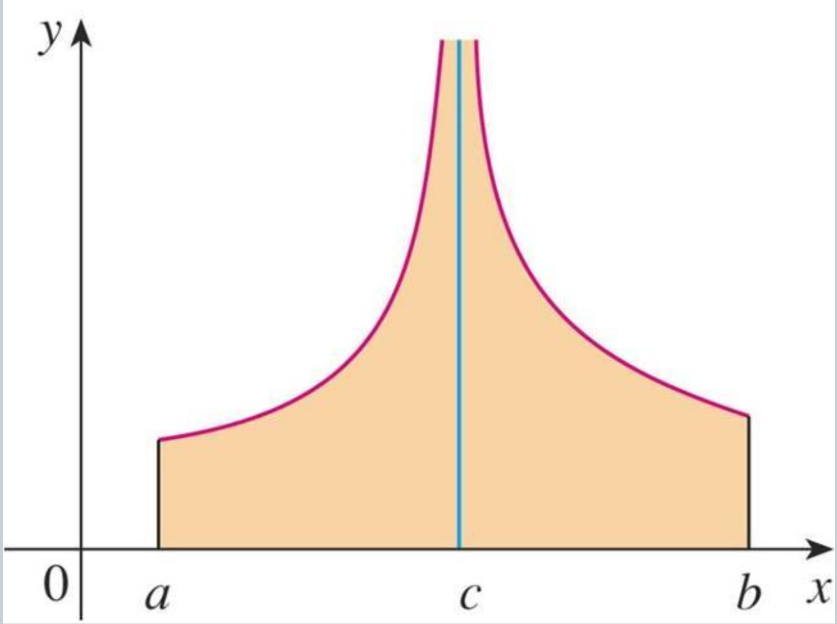
Definicija 3c

- Ako funkcija f ima vertikalnu asimptotu x=c, gde je a < c < b, a oba integrala $\int_a^c f(x)\,dx$ i $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergiraju, onda se definiše:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

- Ilustraciju Definicije 3c vidimo na slici za pozitivnu funkciju $f(x) \geq 0$ koja ima vertikalnu asimptotu u c.



NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 5

- Naći $$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$$
  - Prvo treba uočiti da je dati integral nesvojstven zato što funkcija
    $$f(x) = 1/\sqrt{x-2}$$

  ima vertikalnu asimptotu $x = 2$.

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 5

- Funkcija neograničeno raste na levom kraju intervala [2, 5].
- Koristimo Definiciju 3b:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5$$

$$= \lim_{t\to 2^+} 2(\sqrt{3}-\sqrt{t-2})$$

$$= 2\sqrt{3}$$

- Dakle, dati nesvojsveni integral konvergira.

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 6

- Izračunati $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ ako je moguće.

  - Treba uočiti da je $x = 1$ vertikalna asimtota za podintegralnu funkciju.

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 6

- Kako se vertikalna asimptota nalazi unutar intervala [0, 3], koristi se Definicija 3c sa $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

gde

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

- Zato što $1 - t \to 0^+$ kada $t \to 1^-$.

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 6

- Dakle, $\int_0^1 dx/(x-1)$ divergira.
- Iz toga sledi da je i polazni integral $\int_0^3 dx/(x-1)$ divergentan.
  - Tada nema potrebe da se računa $\int_1^3 dx/(x-1)$.

NAPOMENA

- Da nekim slučajem u prethodnom primeru nismo uočili da je funkcija neograničena u okolini $x = 1$, i da smo ga računali kao običan određeni integral, dobili bismo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3$$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2$$

- Ovo je pogrešno jer je integral nesvojstven i moraju se koristiti granične vrednosti za njegovo izračunavanje!

NAPOMENA

- Dakle, kada naiđete na simbol $\int_a^b f(x)\,dx$, morate prvo na osnovu osobina funkcije f na $[a, b]$, utvrditi da li je to:
  - običan određeni integral

  ili

  - nesvojstveni integral

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 7

- Izračunati $$\int_0^1 \ln x \, dx$$
  - Za funkciju $f(x) = \ln x$ znamo da ima vertikalnu asimptotu u 0, pošto važi $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
  - Tako da je ovo nesvojstveni integral i imamo

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \ln x \, dx$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 7

- Parcijalnom integarcijom $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$, i $v = x$ se dobija:

$$\int_t^1 \ln x\, dx = x \ln x \Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$

$$= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t)$$

$$= -t \ln t - 1 + t$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 7

- Primenom Lopitalovog pravila, dobija se:

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{1/t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-1/t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}(-t)$$

$$= 0$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 7

- Dakle,

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t - 1 + t)$$

$$= -0 - 1 + 0$$

$$= -1$$

NESVOJSTVENI INTEGRAL II VRSTE

Primer 7

- Geometrijska interpretacija prethodnog primera je data na slici.

  - Površina osenčene oblasti iznad krive $y = \ln x$ a ispod x-ose je 1.