

NIZOVI REALNIH BROJEVA

Niz je matematički koncept koji opisuje situaciju u kojoj su elementi nekog skupa poređani, tj. indeksirani prirodnim brojevima.

Generalno, niz je preslikavanje koje svakom prirodnom broju (indeksu niza) dodeljuje neku sliku: interval, broj, funkciju. Nas interesuje slučaj kada je kodomen takvog preslikavanja neki podskup skupa \mathbb{R} .

Brojni niz je funkcija koja svakom prirodnom broju dodeljuje neki realan broj

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tako definisana funkcija će se označavati sa

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ili samo} \quad (a_n),$$

pri čemu je $a_n = a(n)$ **opšti član** tog niza. Elementi niza, tj. brojevi a_1, a_2, a_3, \dots se zovu **članovi** niza.

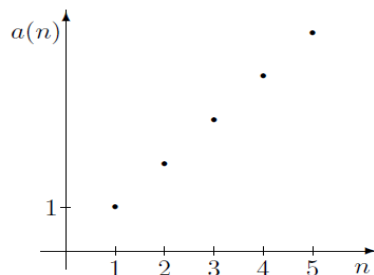
S obzirom da će se posmatrati isključivo brojni nizovi, skraćeno ćemo ih zvati nizovima.

Niz je moguće zadati na različite načine:

- nabranjem (npr: $1, 1, 1, 1, \dots$),
- opisno (niz jedinica; niz parnih brojeva),
- eksplicitnim navođenjem funkcije, odnosno opšteg člana ($a_n = 1, n \in \mathbb{N}$; $a_n = 2n, n \in \mathbb{N}$; $a_n = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}$),
- rekurentnom vezom između uzastopnih članova niza ($a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1}, n \geq 2$)

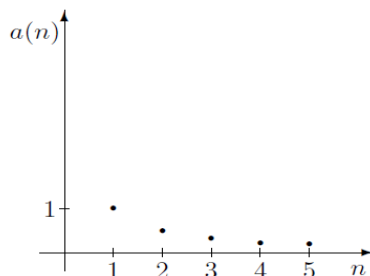
Primeri:

1. Niz prirodnih brojeva počinje članovima 1, 2, 3, ..., a opšti član mu je zadat formulom $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.



2. Niz kvadrata prirodnih brojeva počinje članovima 1, 4, 9, ..., a opšti član mu je zadat formulom $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Niz prostih brojeva počinje brojevima 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., ali za njegov opšti član ne postoji formula.
4. Harmonijski niz počinje brojevima $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ Njegov opšti član je $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, a rekurentna veza

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right), \quad n \geq 2.$$



5. Fibonačijev niz se zadaje rekurentnom formulom

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Ovaj niz počinje brojevima 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, ..., a moguće ga je zadati i opštim članom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

6. Za niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definisan sa

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right), \quad n \geq 2,$$

važi: $a_2 = 1,5$, $a_3 = 17/12 = 1,41\bar{6}$,

$$a_4 = 577/408 = 1,41421568627450980392\bar{1},$$

pa se u tri iteracije dobija približna vrednost broja $\sqrt{2}$ sa pet tačnih cifara iza decimalnog zareza.

Osnovna svojstva nizova

Niz čiji su svi članovi, počevši od nekog člana, jednaki zove se **stacionaran niz**.

Primer: Niz $a_n = \left\lfloor \frac{5}{n} \right\rfloor + 1$, $n \in \mathbb{N}$ je stacionaran ($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći ceo broj koji je manji ili jednak sa x).

Kako je $\left\lfloor \frac{5}{n} \right\rfloor = 0$ za $n \geq 6$, imamo da su članovi niza: 6, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, ..., 1, ...

Niz (a_n) je **rastući** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \leq a_{n+1}$.

Niz (a_n) je **opadajući** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \geq a_{n+1}$.

Niz (a_n) je **strogo rastući** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n < a_{n+1}$.

Niz (a_n) je **strogo opadajući** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n > a_{n+1}$.

Ako je niz (strogo) rastući ili (strogo) opadajući, kažemo da je **monoton**.

Niz (a_n) je **pozitivan (negativan)** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n > 0$ ($a_n < 0$). Ako

za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \geq 0$ onda je niz (a_n) **nenegativan**.

Primeri:

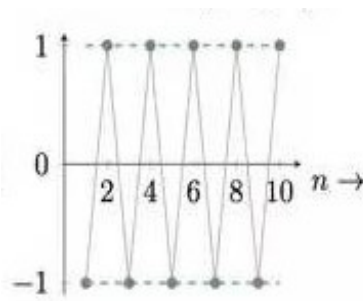
1. Niz $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ je strogo rastući i pozitivan.

2. Niz $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ je strogo opadajući i pozitivan.

3. Niz $a_n = \lfloor \log n \rfloor$, $n \in \mathbb{N}$ je rastući i nenegativan

$$a_1 = a_2 = \dots = a_9 = 0, \quad a_{10} = \dots = a_{99} = 1, \quad a_{100} = \dots = a_{999} = 2, \dots$$

4. Niz $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ nije monoton nego **alternirajući**.



Sa svakim nizom (a_n) posmatra se i skup vrednosti članova niza

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ovaj skup može da bude konačan, kao što je to slučaj sa nizom $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz se sastoji od beskonačno mnogo članova jednakih sa 1 i beskonačno mnogo članova jednakih sa -1 . Ali je skup vrednosti ovog niza konačan skup $\{1, -1\}$.

Niz (a_n) je **ograničen sa donje strane** ako postoji broj m_d takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $m_d \leq a_n$.

Niz (a_n) je **ograničen sa gornje strane** ako postoji broj m_g takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \leq m_g$.

Niz (a_n) je **ograničen** ako je ograničen i sa gornje i sa donje strane, tj. ako postoji

realan broj $M > 0$ takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$|a_n| \leq M \quad \Leftrightarrow \quad -M \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Primer:

1. Niz $a_n = \sin \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ je ograničen jer je sinusna funkcija ograničena ($M = 1$).
2. Niz $a_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ nije ograničen jer za svako $M > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $\sqrt{n} > M$. Dovoljno je uzeti $n > M^2$.

Pitanje koje nas najviše zanima kod nizova je *ponašanje niza za velike vrednosti n*.

Granična vrednost niza, konvergencija niza

Pogledajmo niz (a_n) zadat formulom

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Njegove vrednosti opadaju i približavaju se nuli, tj. postaju proizvoljno blizu nule kako se n povećava.

Slično, vrednosti niza (a_n) koji je zadat formulom

$$a_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

postaju proizvoljno bliske broju 1.

S druge strane, vrednosti nizova (a_n) , (b_n) i (c_n) zadatih formulama

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^n n, \quad \text{i} \quad c_n = n^2$$

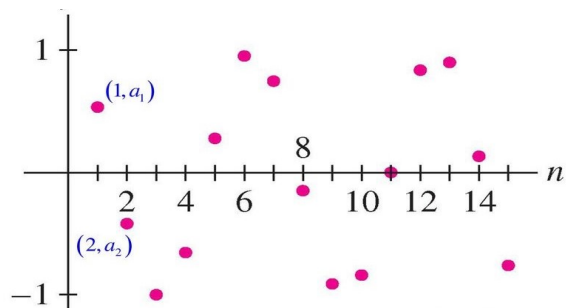
se za velike vrednosti indeksa n ne približavaju ni jednom fiksnom realnom broju. Dakle, se ti nizovi kvalitativno drugačije ponašaju.

Za realan broj L i $\varepsilon > 0$ interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ je **ε -okolina tačke** L .

Za $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je **tačka nagomilavanja** niza (a_n) ako se u svakoj ε -okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo članova niza (a_n) .

Primeri:

1. Tačka nagomilavanja niza $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ je 0.
2. Tačka nagomilavanja stacionarnog niza $4, 3, 2, 1, 1, \dots, 1, \dots$ je 1.
3. Niz čiji je opšti član $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ ima dve tačke nagomilavanja: 0 i 1.
4. Niz sa opštim članom $a_n = n^2$ nema tačku nagomilavanja.
5. Niz sa opštim članom $a_n = \cos n$ nema tačku nagomilavanja.



Realan broj L je **granična vrednost** niza (a_n) ako se izvan svake ε -okoline tačke L nalazi najviše konačno mnogo članova niza (a_n) , tj.

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 (koji zavisi od ε) tako da

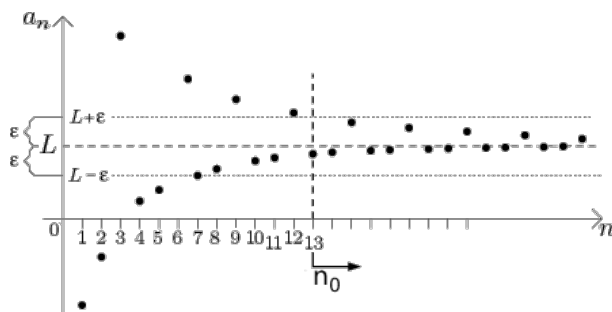
$$\text{za svaki prirodan broj } n \geq n_0, \quad \text{važi } |a_n - L| < \varepsilon.$$

Tada pišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

i kažemo da niz (a_n) **konvergira** ka broju L , ili da je broj L **granična vrednost (granica, limes)** tog niza.

Granična vrednost niza (ako postoji) je i njegova tačka nagomilavanja. Obrnuto ne mora da važi.



Primer: Neka je niz (a_n) dat formulom $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

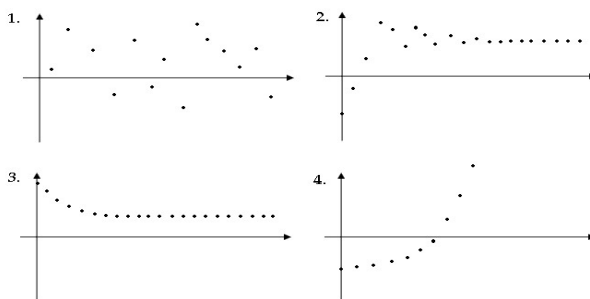
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Zaista, uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Pitanje je: Da li možemo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da važi

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_0$? Očigledno da je dovoljno uzeti $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Za malo ε , npr. $\varepsilon = 10^{-100}$, $n_0 = 10^{100} + 1$.

Za svaki niz koji ima graničnu vrednost kažemo da je **konvergentan**, u suprotnom kažemo da je **divergentan**.



Za niz (a_n) kažemo da **divergira u plus beskonačno**, i pišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom da

$$\text{za svako } n \geq n_0 \text{ važi } a_n > M.$$

Za niz (a_n) kažemo da **divergira u minus beskonačno**, i pišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

ako za svaki realan broj $M < 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom da

$$\text{za svako } n \geq n_0 \text{ važi } a_n < M.$$

Ovo je divergencija u užem smislu. Niz $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je takođe divergentan u širem smislu jer nema graničnu vrednost.

Primer: Niz (a_n) zadat formulom $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ je divergentan. Važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$$

zato što je za proizvoljno $M > 0$ dovoljno uzeti $n_0 = \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1$ jer onda važi $a_n > M$ za svako $n \geq n_0$.

Primer: Niz (a_n) zadat formulom $a_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$ je divergentan. Važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty.$$

Primer: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$; Za $q \leq -1$ niz (q^n) je divergentan.

Osobine konvergentnih nizova

- Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost.
- Konvergentan niz ima samo jednu tačku nagomilavanja i to je njegova granična vrednost.
- Promena konačno mnogo članova niza ne utiče na limes.
- Limes može ali ne mora biti član niza.

Primer: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0$, ($a_1 = 0$); $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, (0 nije član niza)

- Svaki konvergentan niz je ograničen. Obrnuto ne mora da važi.

Primer: Niz $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ je ograničen ($0 \leq a_n \leq 1$), ali nije konvergentan.

Ako su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gde $a, b \in \mathbb{R}$, onda važi:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, ako je $b \neq 0$ i ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $b_n \neq 0$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$, gde je k neparan broj, ili je k paran broj i za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \geq 0$;
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^k$, gde je $k \in \mathbb{N}$.
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$, $c \in \mathbb{R}$.

Primer: Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n - 10}{n} \right)$.

Primer: Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 5n + 2}{n^2 + 7n - 4} \right)$.

Primer: Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^3 + n - 2}{3n^2 - 2n} \right)$.

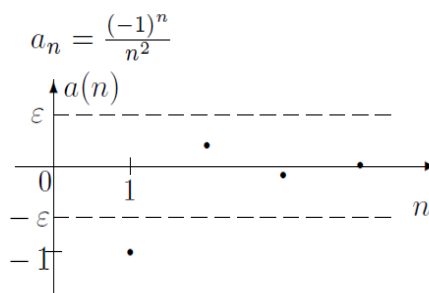
Primer: Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-4n^3 + n - 2}{3n^2 - 2n} \right)$.

Primer: Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + n - 2}{3n^3 - 2n} \right)$.

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Obrnuto ne mora da važi.

Primer: Niz $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, n \in \mathbb{N}$ je konvergentan, ali nije monoton.



Može se pokazati da je niz realnih brojeva (a_n) definisan sa

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

strogo rastući i ograničen ($2 \leq a_n < 3$), pa ima graničnu vrednost i to je broj koji zovemo e . Dakle,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828182845904523536$$

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2,00000
2	2,25000
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827

Može se pokazati da ako je niz (a_n) takav da važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

onda važi i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Primer: Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{2n}$.

Primer: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

Još neke osobine **konvergentnih** nizova:

1. Ako je niz (a_n) strogo pozitivan i konvergentan, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0 \quad \text{i} \quad a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

onda važi $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$.

2. Ako je niz (a_n) konvergentan, onda važi $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$.

Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ **i** $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ (**ili** $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$) onda važi

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$, ako je $b > 0$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$, ako je $b < 0$,

Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ **i** $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ (**ili** $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$) onda važi

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$, ako je $b > 0$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$, ako je $b < 0$,

Neka su (a_n) i (b_n) bilo koja dva niza realnih brojeva takva da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

Da li se nešto može zaključiti o konvergenciji nizova

$$a) \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \quad \text{i} \quad b) (a_n - b_n)?$$

- a) U prvom slučaju kažemo da se radi o tzv. neodređenom obliku " $\frac{\infty}{\infty}$ " jer i brojilac i imenilac divergiraju ka ∞ kada $n \rightarrow \infty$.

Na jednostavnom primeru ćemo videti da granična vrednost ovakvog niza (ako postoji) može biti bilo koji pozitivan realan broj. Neka su

$$a_n = 2n \quad \text{i} \quad b_n = n.$$

Tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, a kako važi $\frac{a_n}{b_n} = 2$, sledi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$.

- b) Ovde se radi o tzv. neodređenom obliku " $\infty - \infty$ ". Ovaj neodređeni oblik u limesu može dati bilo koji realan broj, kao što se vidi na primeru nizova:

$$a_n = c + n \quad \text{i} \quad b_n = n.$$

Tada važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c.$$

Osim ova dva neodređena oblika " $\frac{\infty}{\infty}$ " i " $\infty - \infty$ ", postoje još i sledeći neodređeni oblici

$$">\frac{0}{0}$$
", " $0 \cdot \infty$ ", " 0^0 ", " 1^∞ ", " ∞^0 ".

Primer: Naći graničnu vrednost niza $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

U zadacima se često koriste sledeće granične vrednosti:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases};$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} n^b q^n = 0, \quad |q| < 1, \quad b \in \mathbb{R};$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0;$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Skala rasta nizova:

$$\ln n \prec n^\alpha \prec n^\beta \prec a^n \prec b^n \prec n! \prec n^n$$

za $0 < \alpha < \beta$, $1 < a < b$.

Oznaka \prec se čita "sporije raste".