Aproksimiranje površine

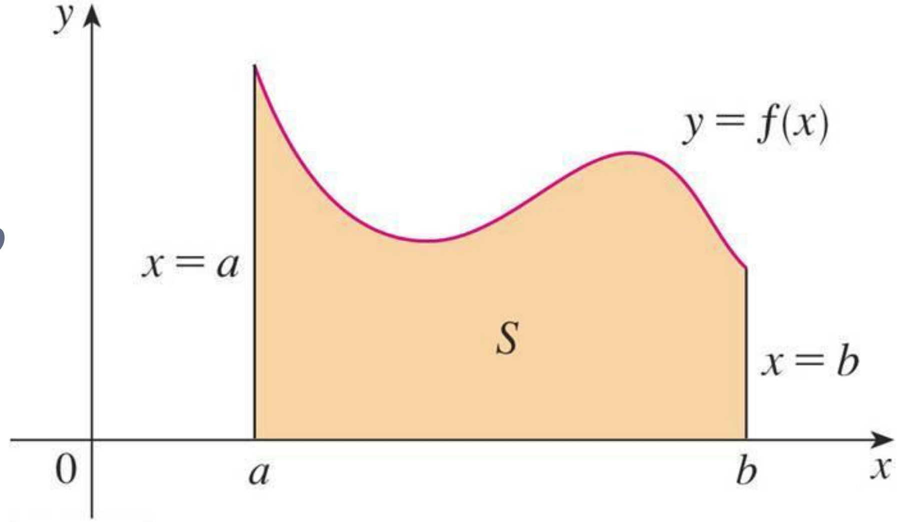
POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Pokušaćemo da rešimo sledeći problem:

- Naći površinu oblasti S koja se nalazi ispod krive $y = f(x)$ od a do b.

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- To znači da je oblast S, data na slici, ograničena sa:
  - Grafikom neprekidne funkcije f (gde je $f(x) \geq 0$)
  - Vertikalnim pravama $x = a$ i $x = b$
  - x-osom

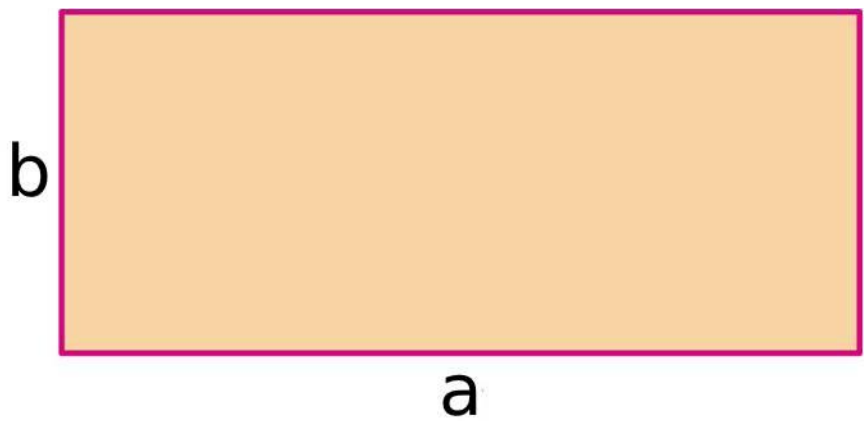


POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Podsetićemo se kako se računaju površine koje su ograničene pravim linijama.

PRAVOUGAONIK

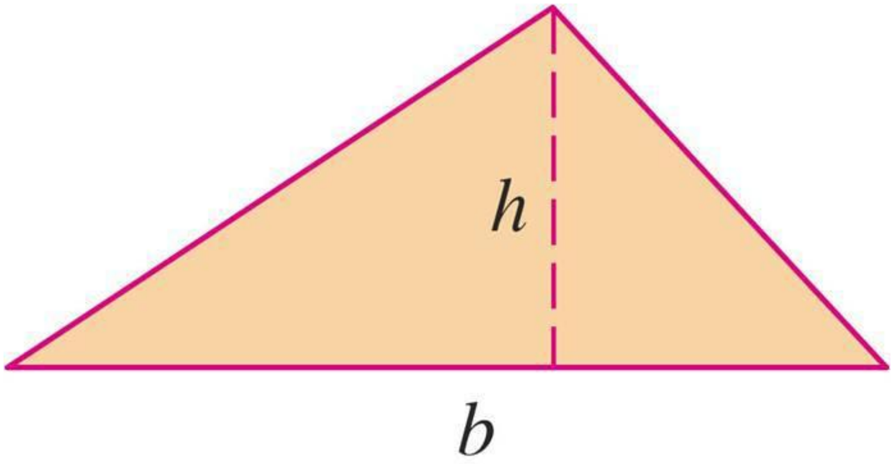
- Površina pravougaonika jednaka je proizvodu njegove dužine i širine.



$$P = ab$$

TROUGAO

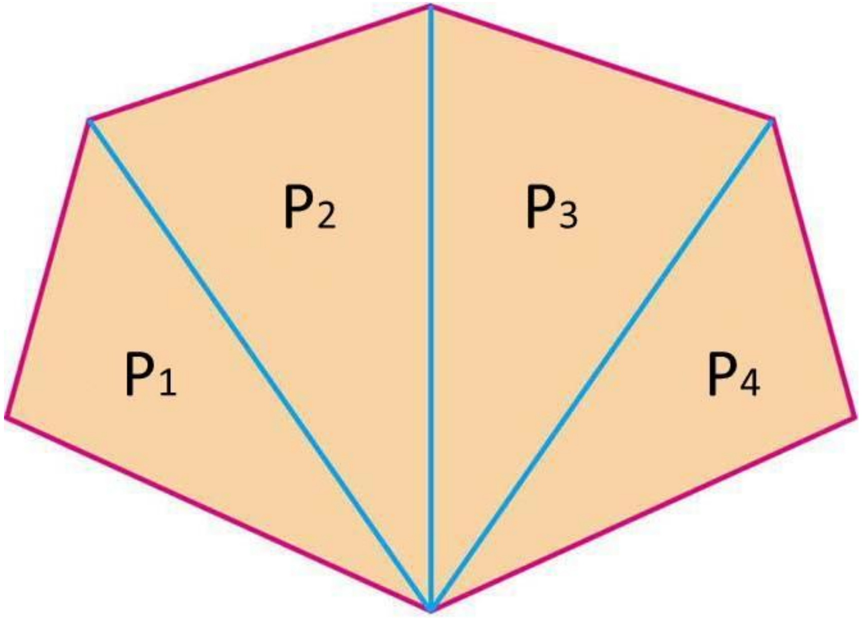
- Površina trougla je jednaka polovini proizvoda stranice i njoj odgovarajuće visine.



$$P = \frac{1}{2} bh$$

MNOGOUGAO

- Površina mnogougla:
  - Mnogougao se podeli na trouglove čije se površine onda saberu.



$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Međutim, računanje površine koja je ograničena krivama je komplikovaniji problem.
  - Intuitivno nam je jasno kako bi ta površina mogla da se izračuna pomoću površina već poznatih i pomenutih oblika.
  - Ali da bi se ta intuitivna ideja sprovela precizno i dala tačan odgovor, potrebno nam je predznanje iz prvog dela ovog kursa.

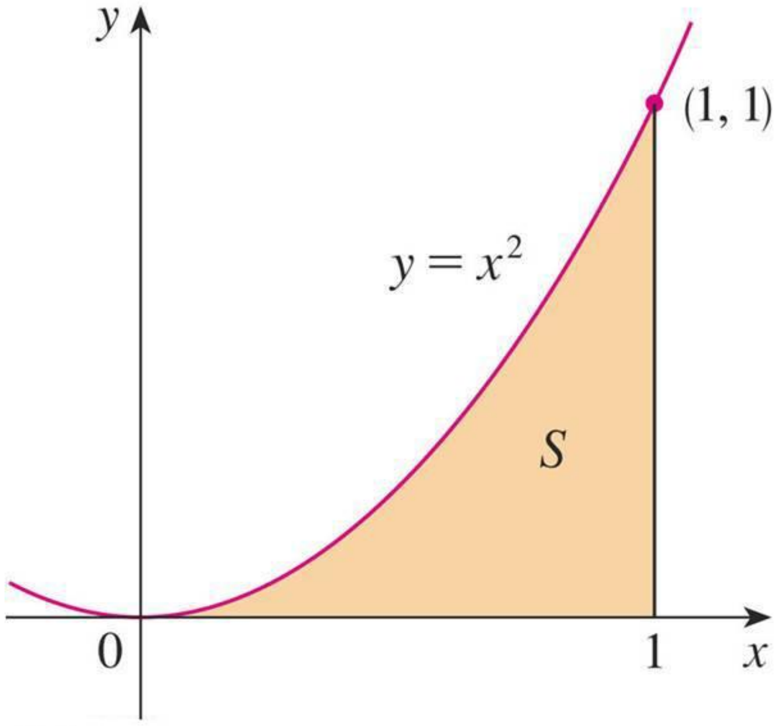
POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Oblast *S* će se prvo aproksimirati pravougaonicima, a onda će se izračunati granična vrednost zbira površina tih pravougaonika kada se njihov broj povećava.
  - Procedura će biti ilustrovana sledećim primerom.

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

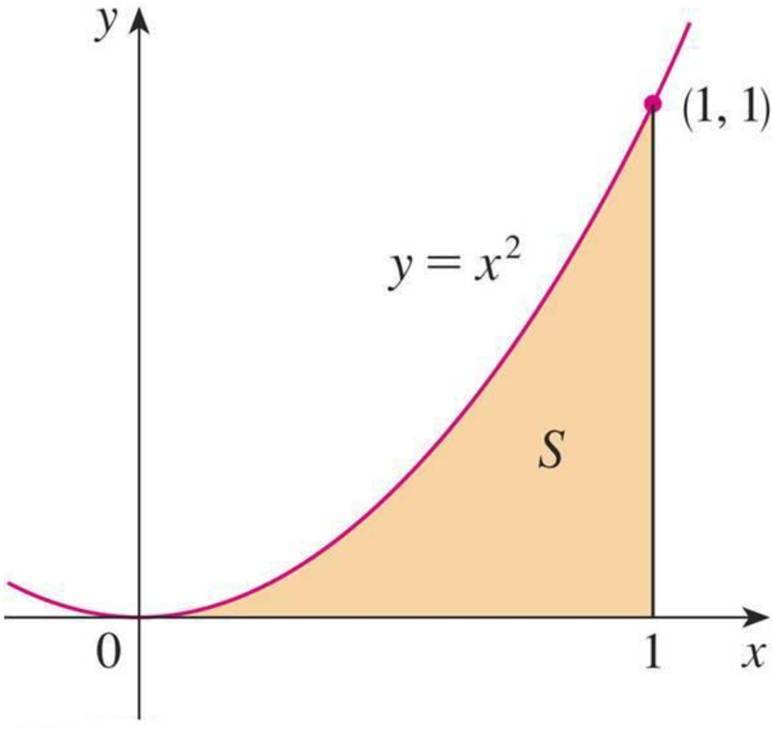
- Koristeći pravougaonike, proceniti površinu oblasti S ispod parabole $y = x^2$ od 0 do 1.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

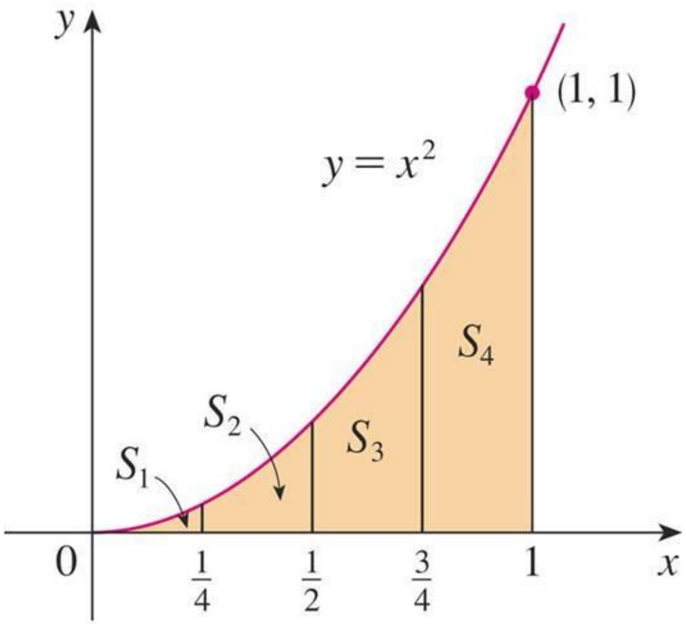
- Primetimo prvo da površina od S mora biti broj između 0 i 1, zato što se S nalazi unutar kvadrata stranice 1.
  - Međutim, želimo bolju aproksimaciju.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Neka je oblast S pomoću vertikalnih linija $x = ¼$, $x = ½$ i $x = ¾$ podeljena na 4 dela: S_1, S_2, S_3 i S_4

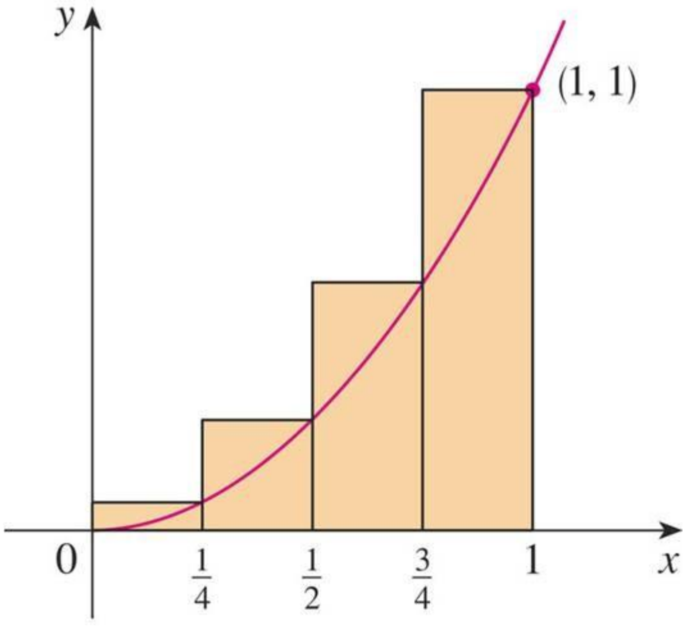


(a)

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Svaki deo se može aproksimirati pravougaonikom čija je osnova ista, a visina jednaka dužini desne stranice.

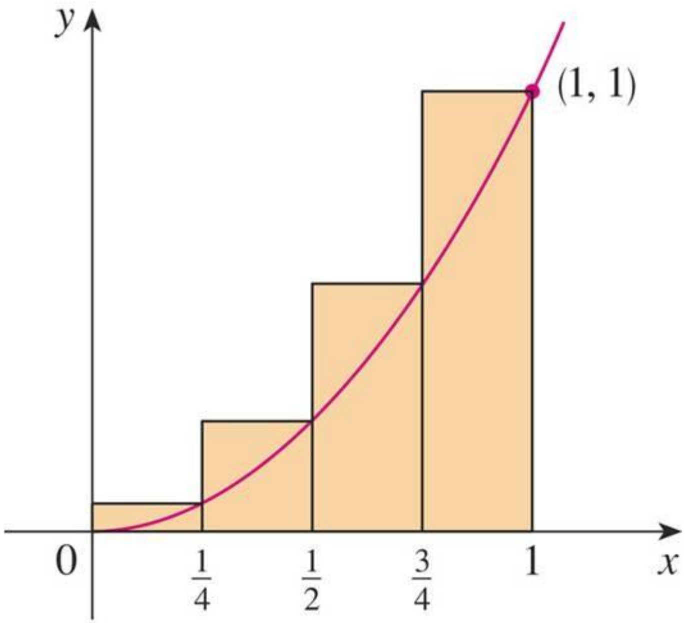


(b)

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Visina ovih pravougaonika predstavlja vrednost funkcije $f(x) = x^2$ u desnim krajevima podintervala $[0, \frac{1}{4}]$,$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ i $[\frac{3}{4}, 1]$.

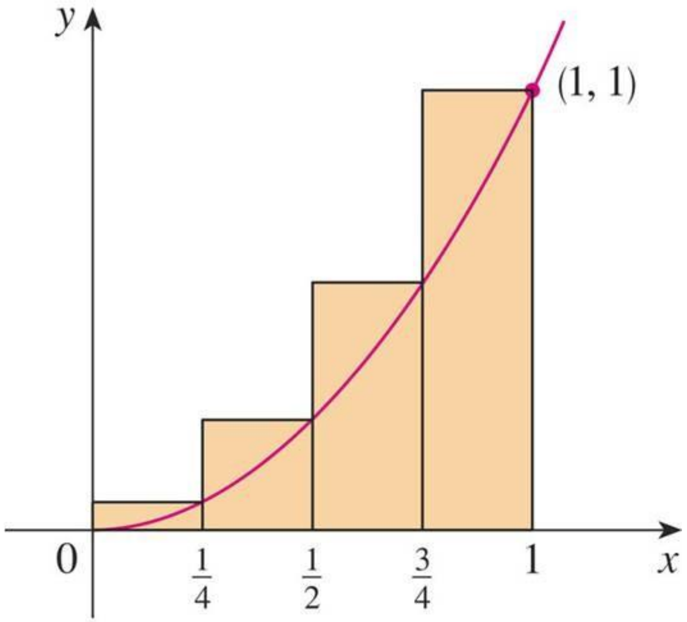


(b)

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Širina svakog pravougaonika je $1/4$, a visine su $(1/4)^2$, $(1/2)^2$, $(3/4)^2$ i 1^2, redom.



(b)

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Ako se sa R_4 označi zbir površina ovih pravougaonika, dobija se:

$$R_4 = \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot 1^2$$

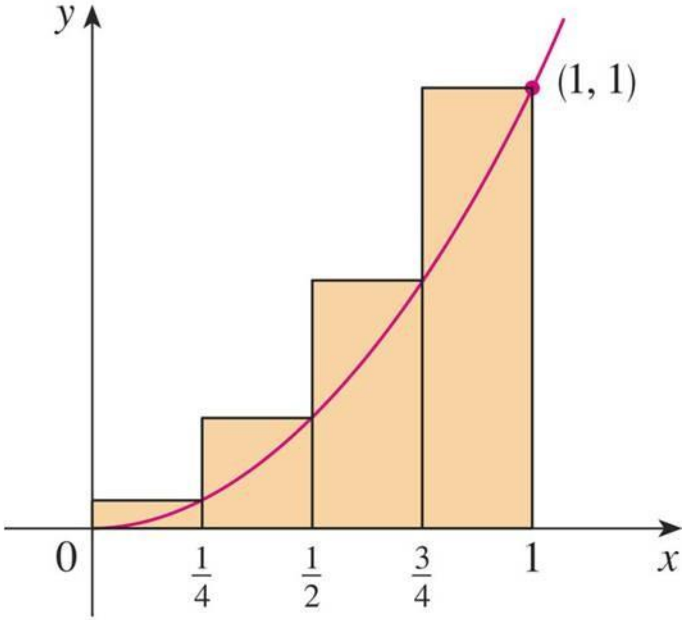
$$= \tfrac{15}{32}$$

$$= 0.46875$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Sa slike se vidi da je površina P oblasti S manja od R_4.
- Dakle, $P < 0.46875$

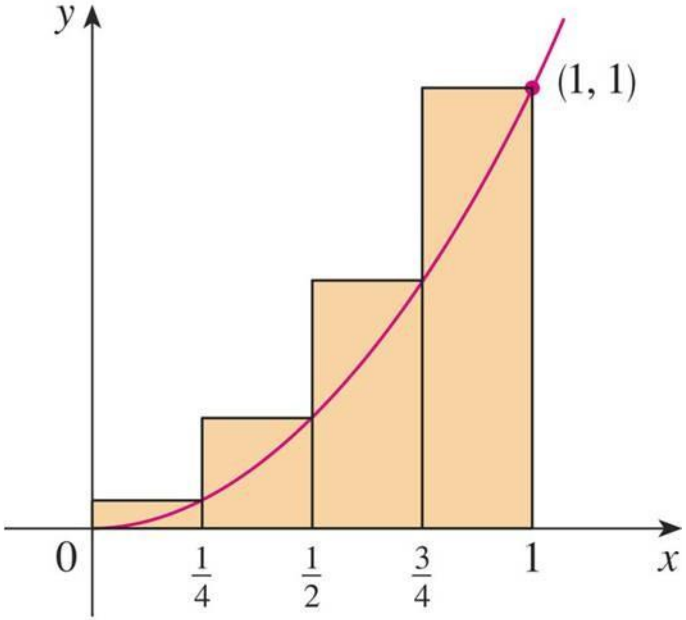


(b)

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Umesto pravougaonika koje smo koristili (na slici), površina se može aproksimirati i pomoću manjih pravougaonika.

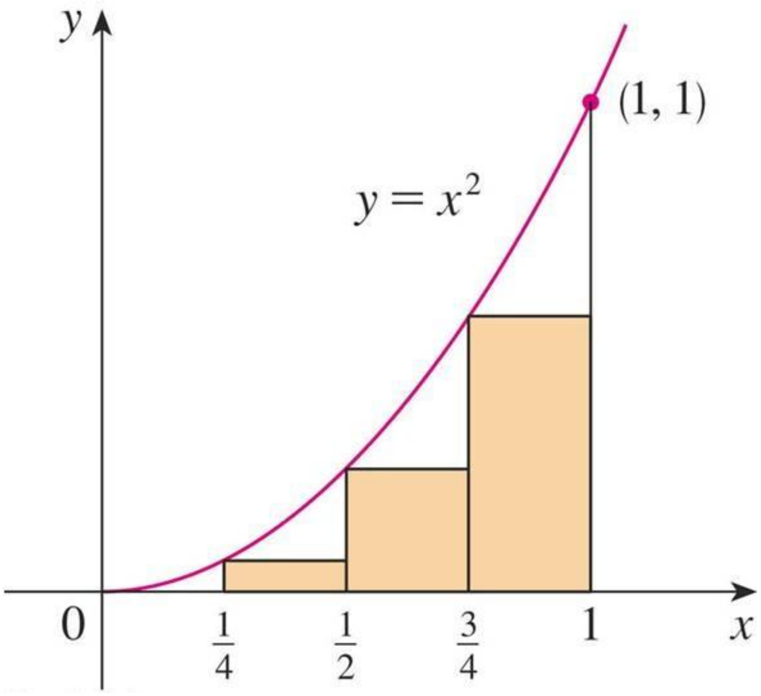


(b)

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Sada su visine pravougaonika vrednosti funkcije *f* u levim krajevima podintervala.
  - Površina u prvom intervalu je aproksimirana sa 0, jer je $f(0)=0$.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Zbir površina ovih pravougaonika je:

$$L_4 = \tfrac{1}{4}\cdot 0^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

$$= \tfrac{7}{32}$$

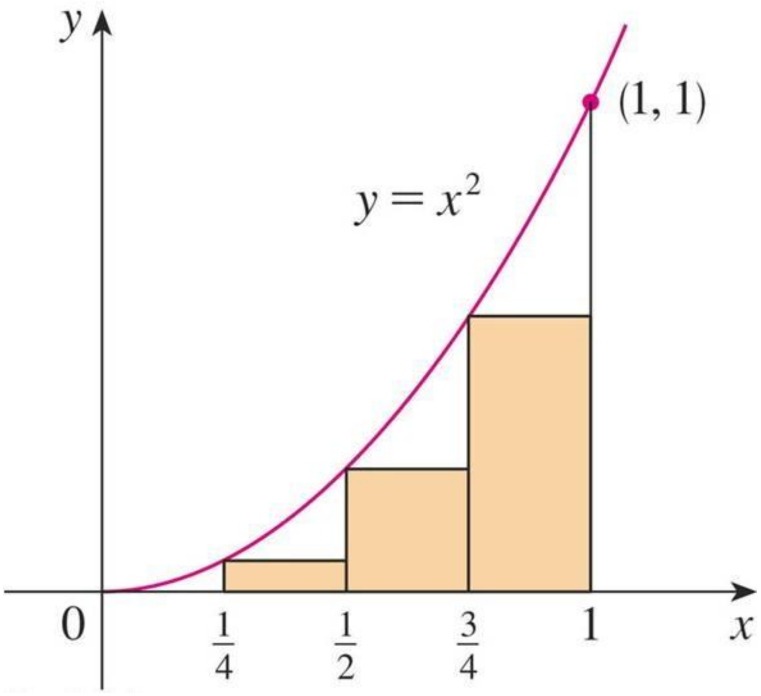
$$= 0.21875$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Sa slike se vidi da je površina oblasti S veća od L_4.

- Dakle, sada imamo donju i gornju ocenu za površinu:
$0.21875 < P < 0.46875$



POVRŠINA ISPOD KRIVE

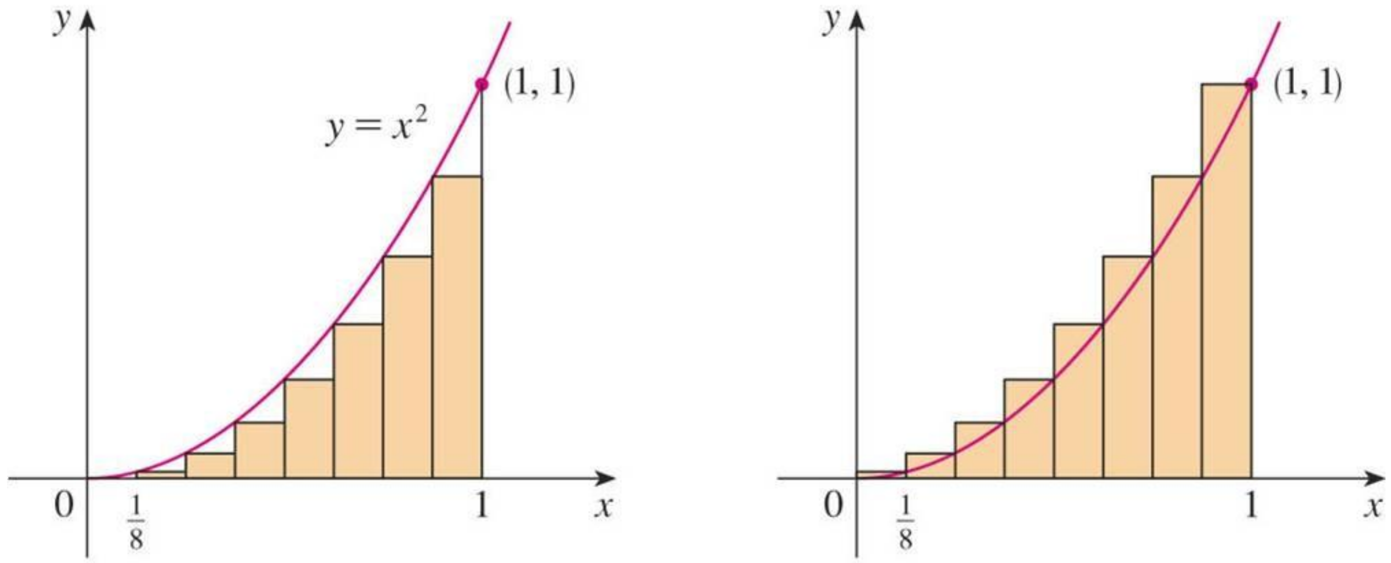
Primer 1

- Procedura se može ponoviti sa većim brojem delova (pravougaonika).

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Na slici je prikazana situacija u kojoj je oblast *S* podeljena na osam delova jednake širine.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Računajući sumu površina manjih pravougaonika (L_8) i sumu površina većih pravougaonika (R_8), dobijaju se bolje ocene za P:

$$0.2734375 < P < 0.3984375$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Dakle, jedan mogući odgovor na postavljeno pitanje je:
  - Površina oblasti S se nalazi između 0.2734375 i 0.3984375.

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Još bolja procena se može dobiti povećanjem broja delova (pravougaonika) u podeli oblasti.

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- U tabeli su prikazani rezultati analognih izračunavanja dobijenih pomoću n pravougaonika.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Iz tabele se vidi da:
  - Sa 50 pravougaonika, površina se procenjuje da je broj između 0.3234 i 0.3434
  - A sa 1000, ta procena se još više sužava na interval između 0.3328335 i 0.3338335

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 1

- Jedna procena za P bi mogla biti, na primer, aritmetička sredina poslednja dva broja:

$$P \approx 0.3333335$$

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Na osnovu vrednosti iz tabele, deluje da se R_n približava 1/3 kako se n povećava.
  - To će biti i dokazano u sledećem primeru.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 2

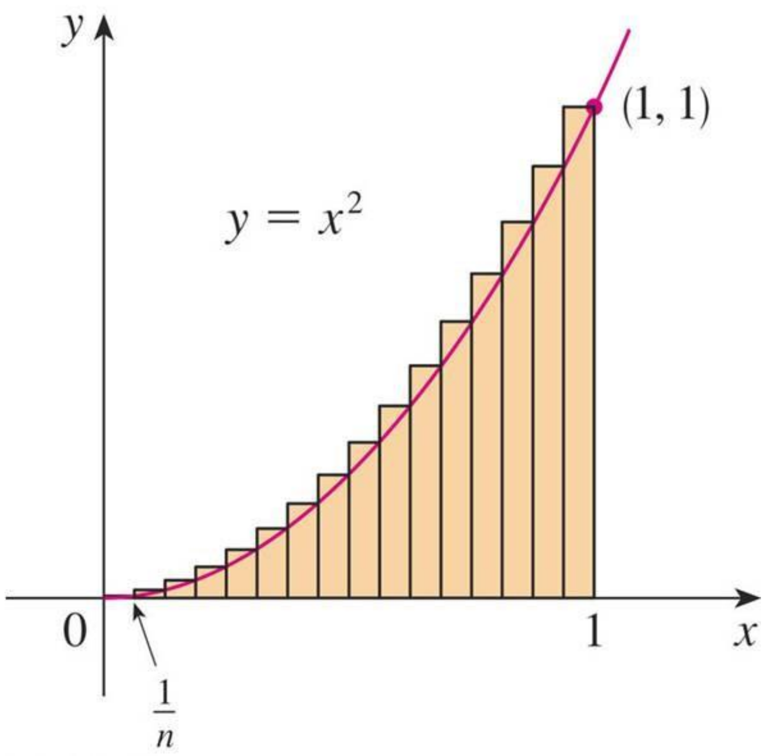
- Za oblast S iz Primera 1, pokazati da suma površina desnih pravougaonika teži ka 1/3, to jest da važi

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

Primer 2

- R_n je zbir površina n pravougaonika.
  - Svaki pravougaonik ima širinu $1/n$, a visina mu je jednaka vrednosti funkcije $f(x) = x^2$ u tačkama $1/n$, $2/n$, $3/n$, …, n/n.
  - To znači da su visine: $(1/n)^2$, $(2/n)^2$, $(3/n)^2$, …, $(n/n)^2$.



Primer 2

- Dakle,

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Sada nam je potrebna formula za zbir kvadrata prvih *n* prirodnih brojeva:

(1) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  - Ova formula je na početku kursa dokazana pomoću matematičke indukcije.

Primer 2

- Kada se formula (1) stavi u izraz za R_n, dobija se:

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Primer 2

- Dakle, imamo:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2$$

$$= \frac{1}{3}$$

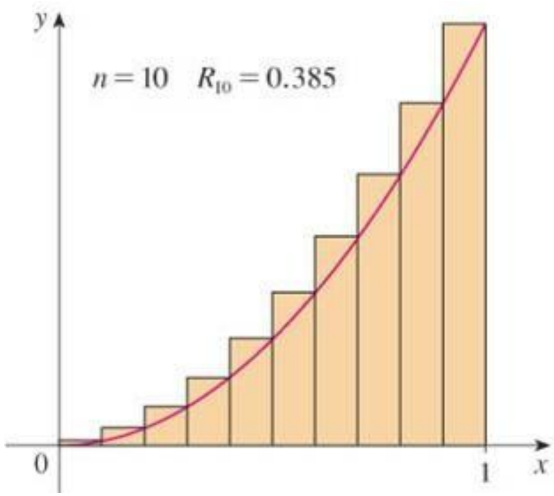
POVRŠINA ISPOD KRIVE

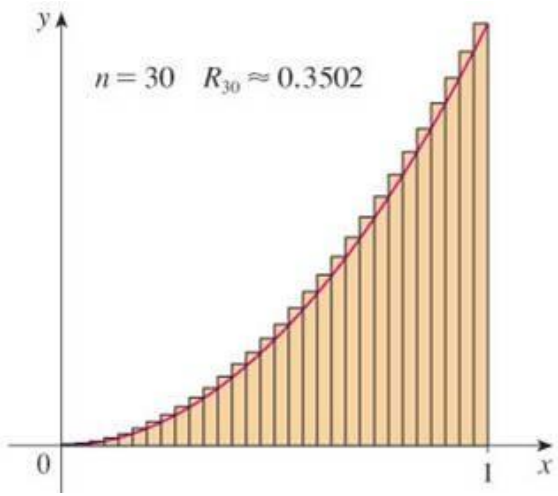
- Može se pokazati da se i druga aproksimirajuća suma takođe približava 1/3, to jest da važi

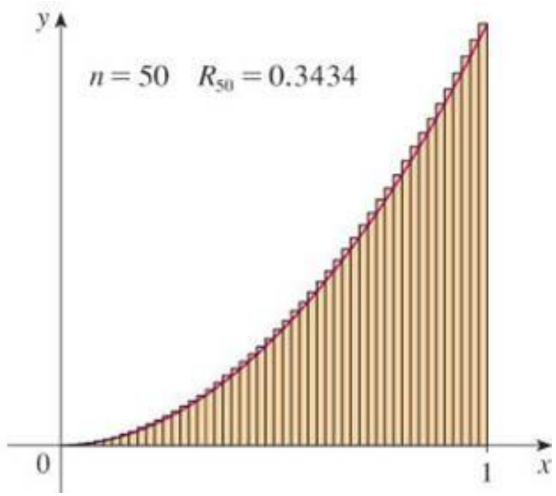
$$\lim_{n \to \infty} L_n = \frac{1}{3}$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Sa slike se vidi da kako se n povećava, R_n postaje sve bolja i bolja aproksimacija površine oblasti S.

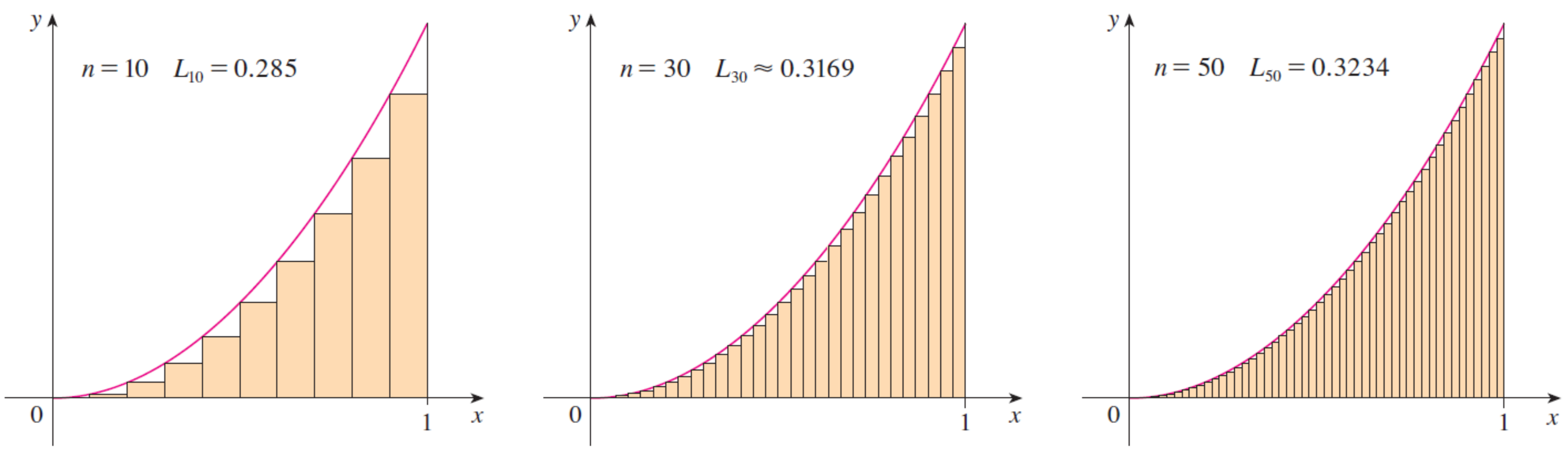






POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Sa te iste slike se vidi da će, kako se n povećava, i L_n postajati sve bolja i bolja aproksimacija za površinu od S.



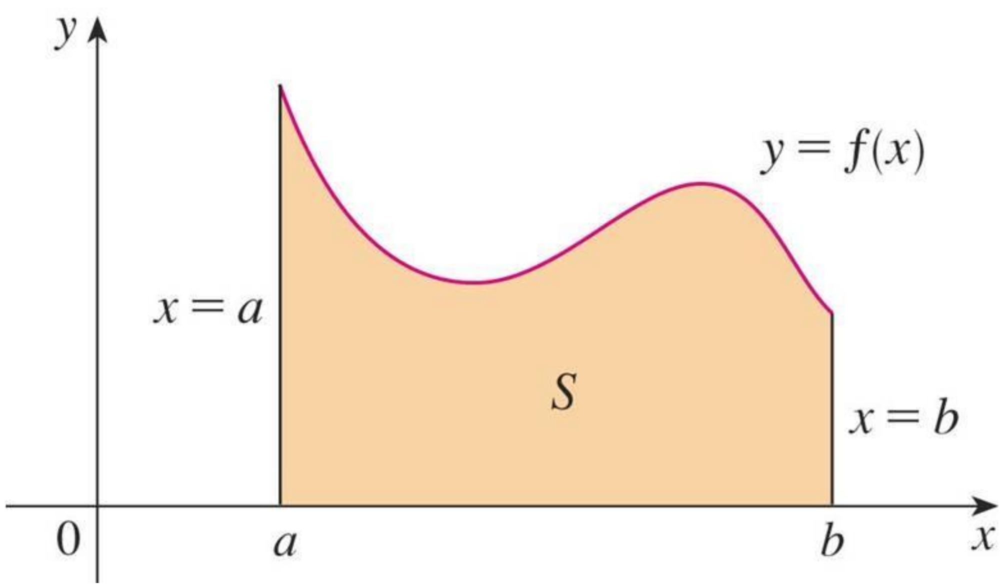
POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Dakle, površina *P* ispod krive se definiše kao granična vrednost sume površina aproksimativnih pravougaonika:

$$P = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

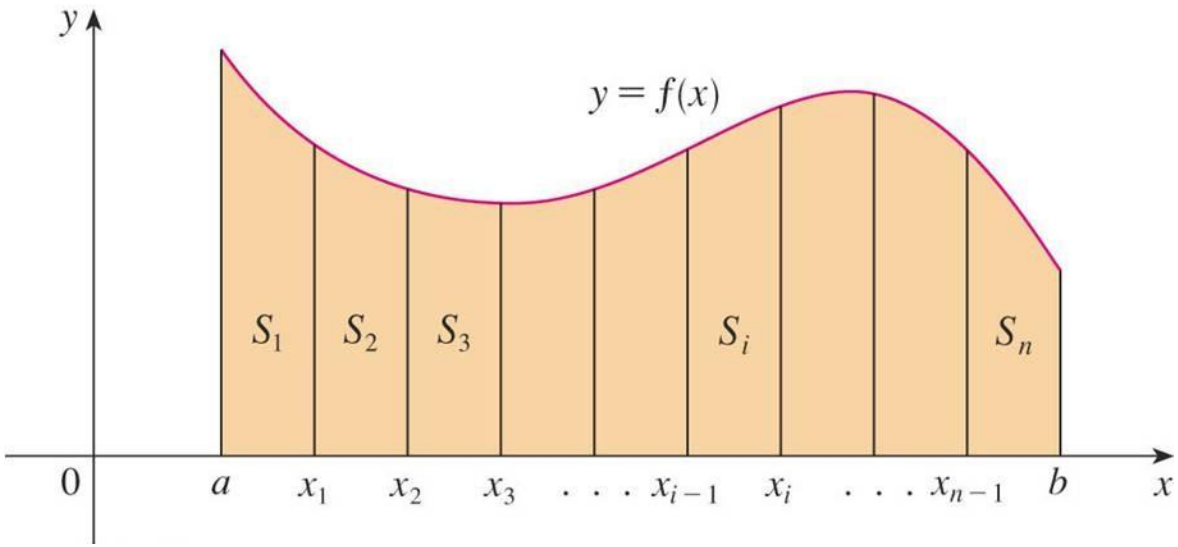
POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Ideja iz Primera 1 i 2 će se primeniti na opšti problem traženja površine oblasti S ispod neprekidne krive $y=f(x)$ u intervalu $[a,b]$.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Počećemo podelom oblasti S na n delova S_1, S_2, …., S_n jednake širine.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Širina intervala $[a, b]$ je $b - a$.
- Dakle, širina svakog od n podintervala je:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Na ovaj način je interval $[a, b]$ podeljen na n podintervala

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

gde je $x_0 = a$, a $x_n = b$.

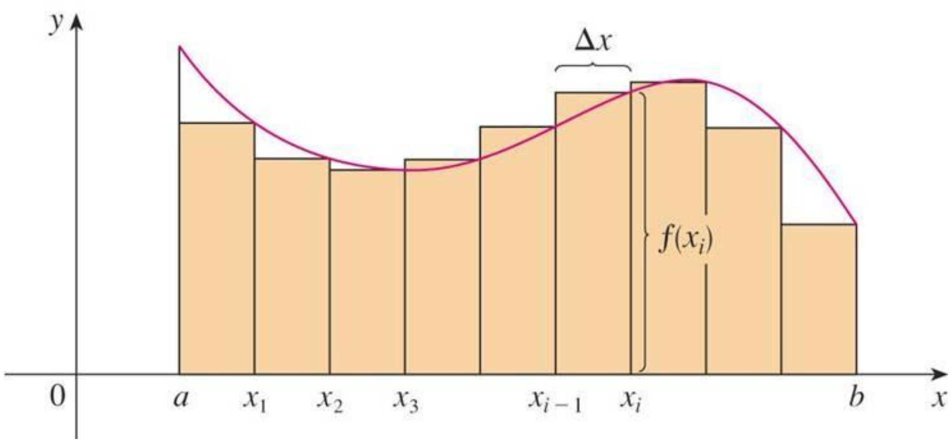
POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Desni krajevi podintervala su:

$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$
$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$
$$\vdots$$
$$x_n = a + n\,\Delta x$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

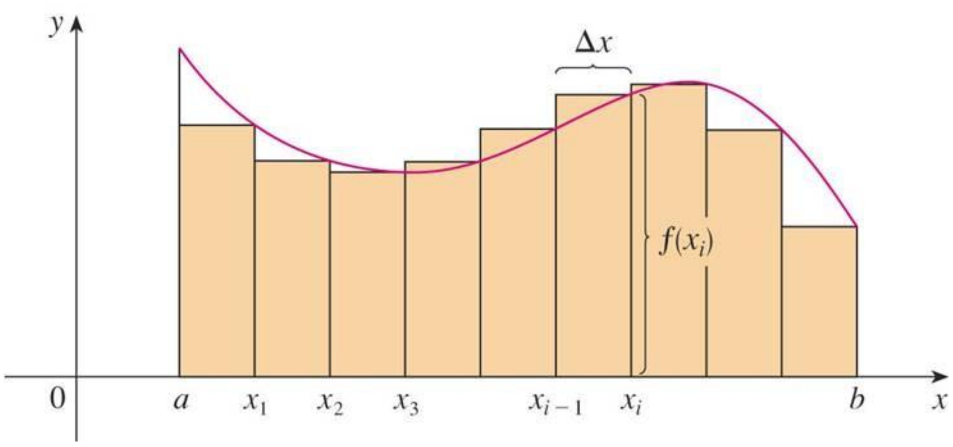
- Deo S_i se aproksimira pravougaonikom čija je širina Δx, a visina $f(x_i)$, što je vrednost funkcije f u desnom kraju podintervala.
  - Tada je površina i-tog pravougaonika jednaka $f(x_i)\Delta x$.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

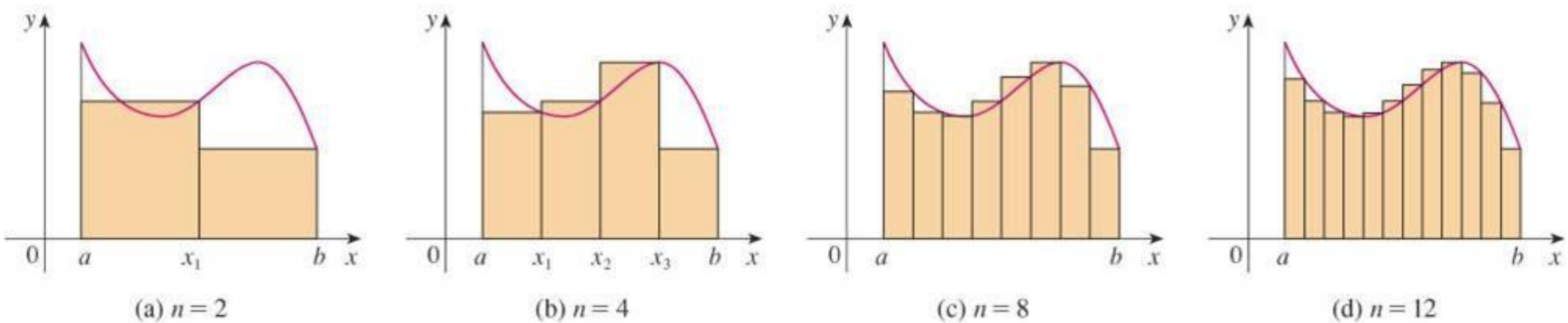
- Tako se površina oblasti S aproksimira zbirom površina pravougaonika:

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x$$



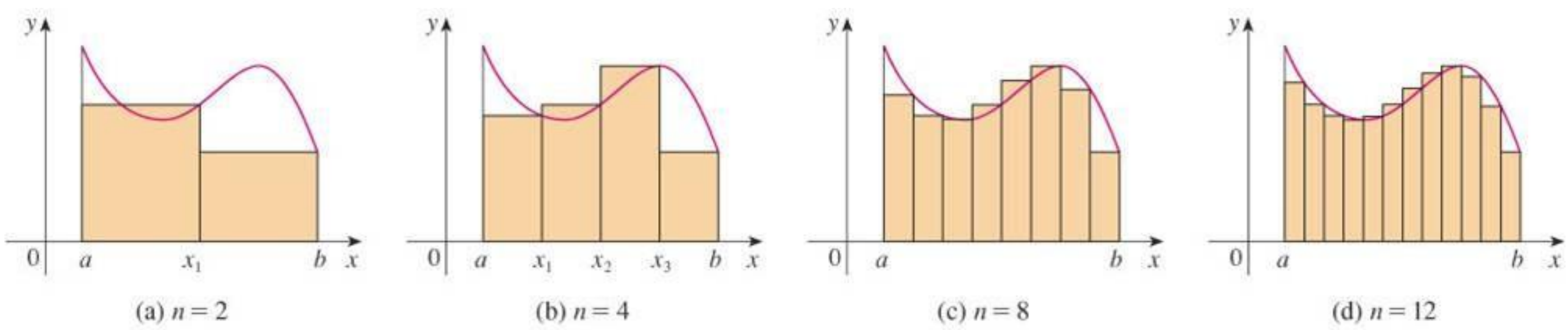
POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Na slikama su date aproksimacije za $n = 2, 4, 8$ i 12.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Treba uočiti da ove aproksimacije postaju sve bliže tačnoj vrednosti površine oblasti S kako se broj delova povećava, to jest, kako $n \to \infty$.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Stoga se površina P oblasti S definiše na sledeći način.

Definicija

- Površina P oblasti S koja se nalazi ispod grafika nengativne neprekidne funkcije f jednaka je graničnoj vrednosti sume površina aproksimirajućih pravougaonika:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{n\to\infty} R_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x\right] \end{aligned} \qquad (2)$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Može se pokazati da granična vrednost iz definicije uvek postoji jer se pretpostavlja da je f neprekidna funkcija.

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Takođe se može pokazati da se ista vrednost dobija i ako se uzmu vrednosti funkcije u levim tačkama podintervala:

$$(3) \qquad P = \lim_{n\to\infty} L_n$$

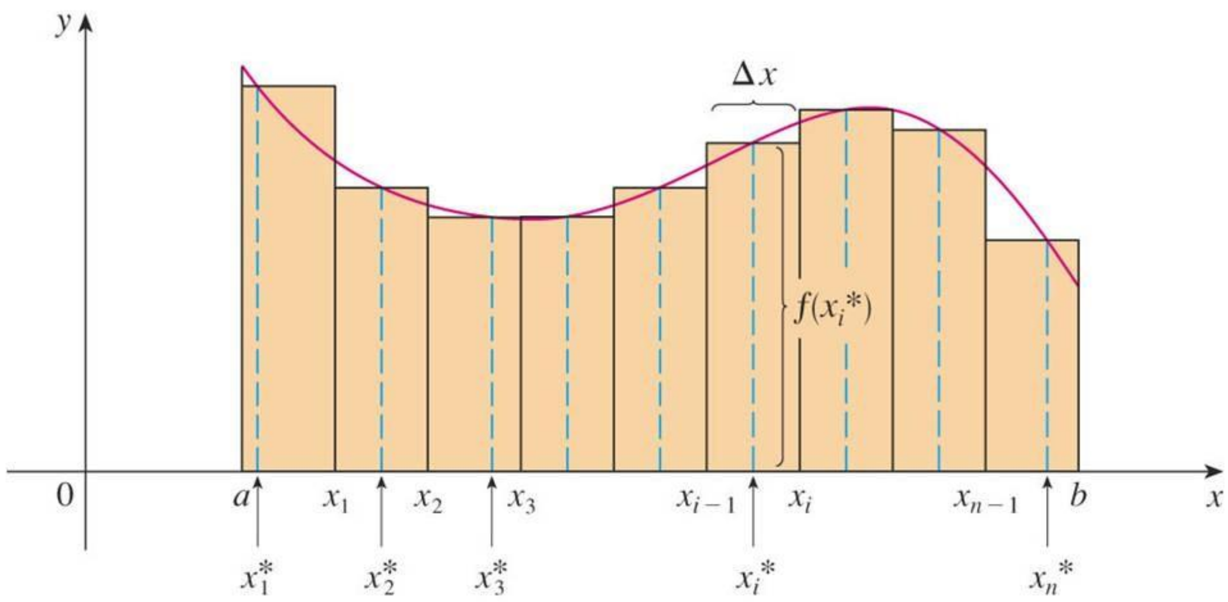
$$= \lim_{n\to\infty}\left[f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x\right]$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Umesto vrednosti funkcije u levim ili desnim krajevima intervala, za visinu *i*-tog pravougaonika se može uzeti vrednost funkcije f u bilo kojoj tački x_i* podintervala $[x_{i-1}, x_i]$.

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Na slici su prikazani aproksimativni pravougaonici koji su napravljeni pomoću tačaka koje nisu krajevi podintervala.



POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Tako da je opštiji izraz za površinu oblasti S dat sa:

(4)
$$P = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\Delta x\right]$$

SIGMA NOTACIJA

- Sigma notacija se koristi da se zbir puno članova zapiše u kraćem obliku.

- Na primer,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$$

POVRŠINA ISPOD KRIVE

- Dakle, izrazi za (2), (3) i (4) se mogu napisati na sledeći način:

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{*})\Delta x$$