

6. Određeni integral

6.1. Definicija i osnovne osobine

Uočimo zatvoren interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Konačan skup tačaka $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, takav da je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, zovemo *podela intervala* $[a, b]$. Sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$ označimo dužinu intervala $[x_{i-1}, x_i]$. Parametar podele P je maksimalna dužina intervala podele P , tj.

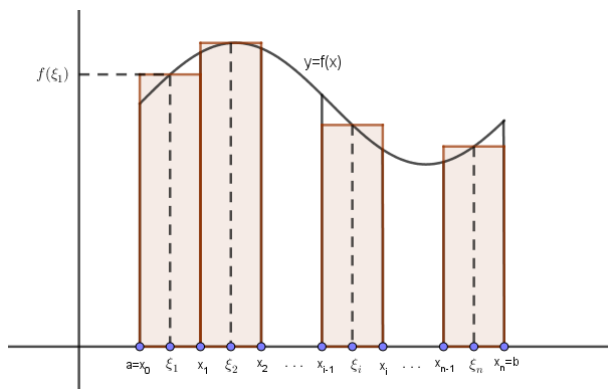
$$\lambda(P) = \max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i.$$

Na svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ izaberemo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Na ovaj način dobija se podela intervala $[a, b]$ sa izabranom tačkom koju označavamo sa (P, ξ) .

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je (P, ξ) podela sa izabranom tačkom intervala $[a, b]$. Zbir

$$S(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

se naziva integralna ili Rimanova suma funkcije $f(x)$ za datu podelu (P, ξ) .



Primetimo da je $f(\xi_i) \Delta x_i$ jednako površini pravougaonika sa stranicama $f(\xi_i)$ i Δx_i , što nam govori da će nam integralna suma (odnosno određeni integral) koristiti da izračunamo površinu dvodimenzionalnih figura.

Definicija 6.1. Za broj I kažemo da je limes (granična vrednost) integralnih suma $S(f, P, \xi)$ funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, za $\lambda(P) \rightarrow 0$ i pišemo $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S(f, P, \xi)$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za svaku podelu P i svaku izabranu tačku $\xi \in \xi(P)$, kada $\lambda(P) < \delta$, važi nejednakost $|S(f, P, \xi) - I| < \varepsilon$.

Ako postoji $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = I$, onda se kaže da je $f(x)$ integrabilna u Rimanovom smislu nad intervalom $[a, b]$. Broj I se naziva **Rimanov ili određeni integral** funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ i piše se

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Pri tom se a i b nazivaju donja odnosno gornja granica integrala, respektivno.

Podela intervala $[a, b]$ na n jednakih delova se naziva ekvidinstantna podela i zbog jednostavnijeg zapisa samo ćemo nju koristiti kod zadataka. Za nju važi da su dužine svih podintervala

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zbog lakšeg zapisa ćemo takođe umesto $S(f, P, \xi)$ koristiti oznaku S_n , gde je n broj delova na koliko je podeljen interval $[a, b]$.

- **Njutn-Lajbnicova formula**

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ i ako $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ova formula i znanje iz rešavanja neodređenog integrale će nam koristiti da rešavamo i određeni integral.

- **Smena promenljive**

Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna, a funkcija $\varphi : [\alpha_0, \beta_0] \rightarrow [a, b]$ ima neprekidan izvod. Ako je $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0], \beta \in [\alpha_0, \beta_0], a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, onda važi jednakost

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Voditi računa da se sa smenom menjaju i granice integrala.

- **Parcijalna integracija**

Neka funkcije $u(x)$ i $v(x)$ imaju neprekidne izvode nad intervalom $[a, b]$. Tada važi jednakost

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx,$$

ili kraće

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

- **Osobine određenog integrala**

1. Ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a onda je $\int_a^a f(x) dx = 0$.

2. Ako je $a < b$ i $\int_a^b f(x) dx$ postoji, onda je $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

4. $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \alpha \in \mathbb{R}$.

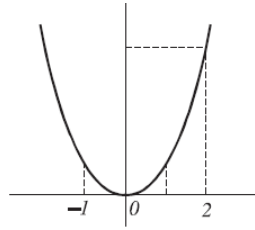
5. Neka tačke a, b i $c \in \mathbb{R}$ predstavljaju krajeve za tri zatvorena intervala. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na najvećem od ovih intervala, onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi jednakost

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

6. Ako je funkcija $f(x)$ parna, tada je $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, a ako je neparna, tada $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Zadatak 6.2. Izračunati po definiciji $\int_{-1}^2 x^2 dx$.

Rešenje.



Interval $[-1, 2]$ podelimo na n jednakih delova. Tada je $\Delta x_i = \frac{2 - (-1)}{n} = \frac{3}{n}$, a za tačke ξ_i izaberimo desne krajeve intervala $[x_{i-1}, x_i]$, tj. $\xi_i = x_i$. Izvedimo izraz za x_i . Kako je $x_1 = -1 + \frac{3}{n}$, $x_2 = x_1 + \frac{3}{n} = -1 + 2 \cdot \frac{3}{n}$, ... vidimo da je $x_k = -1 + \frac{3k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Dakle,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(-1 + \frac{3i}{n} \right)^2 \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{3}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n i + \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \frac{3}{n} \left(n - \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= 3 - 9 \frac{n^2 + n}{n^2} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\ &= 3 + \frac{-19n^2 - 18n + 18n^2 + 27n + 9}{2n^2} = 3 + \frac{9(n+1)}{2n^2}. \end{aligned}$$

Konačno,

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{9(n+1)}{2n^2} \right) = 3.$$

Napomena 6.3. Koristeći Njutn-Lajbnicovu formulu dobijamo

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Zadatak 6.4. Primenom određenog integrala odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ako je

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$$

Rešenje. Zapišimo

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \left(= \Delta x_i \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \right).$$

Dobili smo integralnu sumu funkcije $f(x) = x$ nad intervalom $[0, 1]$ sa podelom $P = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$,

$\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ i $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Napomena 6.5. Kod ovih zadataka obično se izraz zapiše kao suma, a zatim ispred sume izvuče $\frac{1}{n}$ (ili $\frac{2}{n}$ ili $\frac{k}{n}$ za neki pozitivan broj k) što bi predstavljalo dužinu podintervala Δx_i kod ekvidistante podele. Onda se opšti član sume zapiše tako da se u tom izrazu pojavljuju i i n zajedno i to u obliku $\frac{i}{n}$ (ili $\frac{k \cdot i}{n}$ za neko k) tako da se dobije $x_i = \frac{i}{n}$, a granice integrala su i granice intervala $[a, b]$, pa je $a = x_0 = \frac{0}{n} = 0$ i $b = x_n = \frac{n}{n} = 1$ (ili ako je $x_i = \frac{k \cdot i}{n}$ onda je $b = x_n = \frac{k \cdot n}{n} = k$ za neko k). Kada to sredimo, opšti član sume posmatramo kao $f(\frac{i}{n})$, tj. od njega dobijamo podintegralnu funkciju $f(x)$.

Zadatak 6.6. Odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ako je

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2}.$$

Rešenje. Traženu graničnu vrednost ćemo odrediti pomoću određenog integrala i Njutn-Lajbnicove formule.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \\ &= \frac{n}{n^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1 + \frac{2^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n^2}{n^2}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (\frac{i}{n})^2}. \end{aligned}$$

Vidimo da je to integralna suma za funkciju $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nad $[0, 1]$ sa ekvidistantnom podelom $P = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$, $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ i $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Zadatak 6.7. Odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ako je

$$b_n = n^2 \left(\frac{1}{(n+1)(n^2+1)} + \frac{1}{(n+2)(n^2+2^2)} + \dots + \frac{1}{4n^3} \right).$$

Rešenje. Vidimo da ima n sabiraka zato što je $4n^3 = (n+n)(n^2+n^2)$. Slično kao u prethodnim zadacima imamo $b_n = \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{(n+i)(n^2+i^2)}$, a kada podelimo i imenilac i brojilac sa n^3 dobijamo

$$b_n = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+i}{n} \cdot \frac{n^2+i^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + \frac{i}{n})(1 + (\frac{i}{n})^2)}.$$

Vidimo da je b_n jednako integralnoj sumi funkcije $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$ nad $[0, 1]$ sa istom podelom kao u prethodnim zadacima. Tako da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}.$$

Iz $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$ dobija se da je $A = C = \frac{1}{2}$ i $B = -\frac{1}{2}$.

Konačno,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-x+1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+x| \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \arctg x \Big|_0^1 \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.8. Izračunati određeni integral $\int_{-2}^3 |x| dx$.

Rešenje. Koristićemo Njutn-Lajbnicovu formulu, tako da nam treba neodređeni integral od $|x|$. Kako je $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ sledi da se početni integral rastavlja na dva integrala

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 |x| dx &= - \int_{-2}^0 x dx + \int_0^3 x dx = - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 \\ &= -\frac{1}{2}(0^2 - (-2)^2) + \frac{1}{2}(3^2 - 0^2) = \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.9. Izračunati određeni integral $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$.

Rešenje. Slično kao u prethodnom zadatku imamo da je

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & \ln x \geq 0 \quad \text{tj. } x \geq 1, \\ -\ln x, & \ln x < 0 \quad \text{tj. } 0 < x < 1, \end{cases}$$

pa je

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx &= - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right] \\ &= - \left(x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 dx \right) + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx \\ &= - \left(0 - \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 \right) + e - 0 - x \Big|_1^e \\ &= - \left(\frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e} \right) \right) + e - (e - 1) = 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.10. Izračunati određeni integral $\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$.

Rešenje. Izračunajmo ovaj integral pomoću smene

$$\begin{aligned} \int_1^{e^3} \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx &= \left[\begin{array}{l} 1 + \ln x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2t dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = e^3 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right] = 2 \int_1^2 t^2 dt \\ &= \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

6.2. Površina ravnih likova

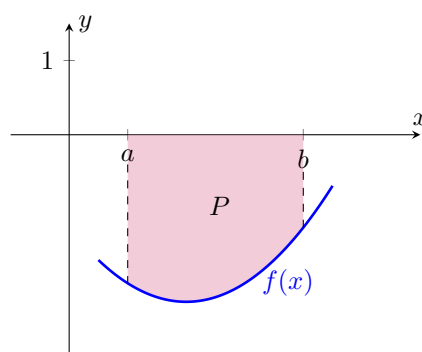
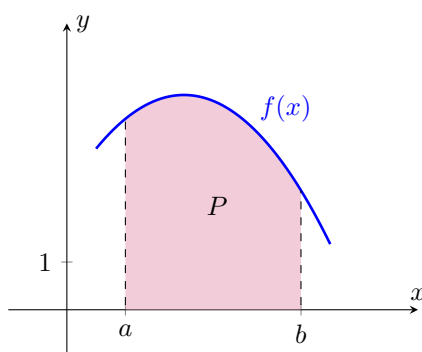
Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$.

Ako sa P označimo merni broj površine krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $y = f(x) \geq 0$, x -osom i pravama $x = a$ i $x = b$, onda važi

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Ako je funkcija $f(x) \leq 0$, onda se merni broj površine ograničene krivom $y = f(x)$, x -osom i pravama $x = a$ i $x = b$ može izračunati kao

$$P = - \int_a^b f(x) dx.$$



Ako je $c \in (a, b)$ i za neprekidnu funkciju $f(x)$ važi da je

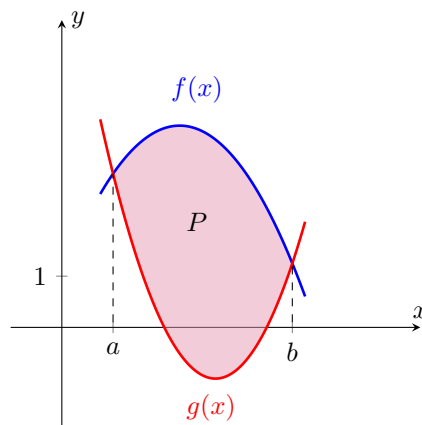
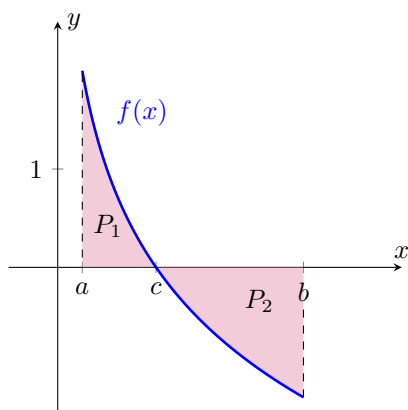
$$f(x) \geq 0 \text{ za } x \in [a, c] \quad \text{i} \quad f(x) \leq 0 \text{ za } x \in [c, b],$$

merni broj površine ograničene krivom $y = f(x)$, x -osom i pravama $x = a$ i $x = b$ može se izračunati kao

$$P = P_1 + P_2 = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$$

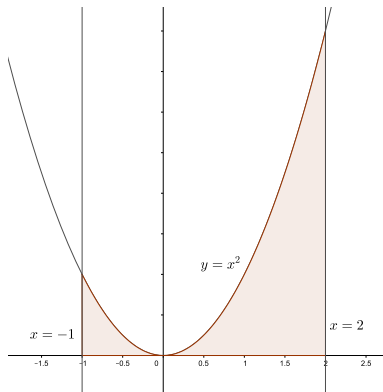
Ako za neprekidne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ na intervalu $[a, b]$ važi $f(x) \geq g(x)$, tada je merni broj površine ograničene krivama $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i pravama $x = a$ i $x = b$ moguće izračunati kao

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



Zadatak 6.11. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y = x^2$, i pravama $x = -1$, $x = 2$ i $y = 0$.

Rešenje.



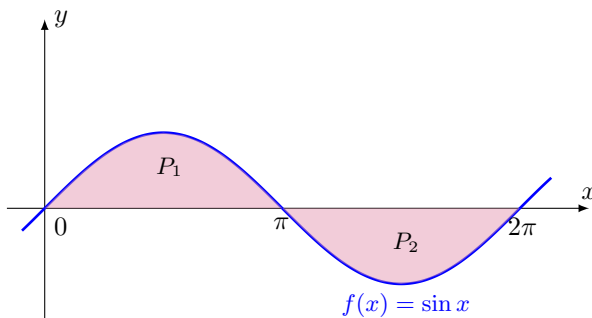
Primetimo, traži se površina koju funkcija $y = x^2$ zahvata sa x -osom, na intervalu $-1 \leq x \leq 2$. Po definiciji određenog integrala, da bi došli do tražene površine, potrebno je izračunati integral date funkcije na tom intervalu, tj.

$$P = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \frac{-1}{3} = 3.$$

Zadatak 6.12. Izračunati površinu koju sinusoida $y = \sin x$ zahvata na intervalu $[0, 2\pi]$ sa x -osom.

Rešenje.

Funkcija $f(x) = \sin x$ menja znak u $x = \pi$, tj. na intervalu $(0, \pi)$ je pozitivna, a na intervalu $(\pi, 2\pi)$ je negativna.



• *Prvi način:*

$$\begin{aligned} P = P_1 + P_2 &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -(\cos \pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos \pi) = -(-1 - 1) + (1 - (-1)) = 4. \end{aligned}$$

• *Drugi način:*

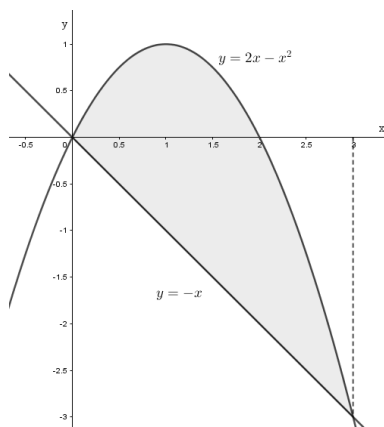
Površine P_1 i P_2 su jednake, pa traženu površinu možemo izračunati i na sledeći način

$$P = 2P_1 = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\pi} = -2(\cos \pi - \cos 0) = -2(-1 - 1) = 4.$$

Zadatak 6.13. Izračunati površinu figure ograničene parabolom $y = 2x - x^2$ i pravom $x + y = 0$.

Rešenje.

Prvo je potrebno naći presek datih krivih, tj. tražimo x i y takve da zadovoljavaju $y = 2x - x^2$ i $x + y = 0$. Dobijamo da je $2x - x^2 = -x$, tj. $x(3 - x) = 0$. Imamo dva rešenja $x = 0$ i $x = 3$.



Sa slike se vidi da je $y = 2x - x^2$ gornja, a da je $y = -x$ donja funkcija. Tako da je površina ograničene oblasti jednaka

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 \\
 &= \frac{3}{2} \cdot 9 - \frac{27}{3} - 0 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

Zadatak 6.14. Izračunati površinu figure ograničene krivama $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, i $y = 2x$.

Rešenje.

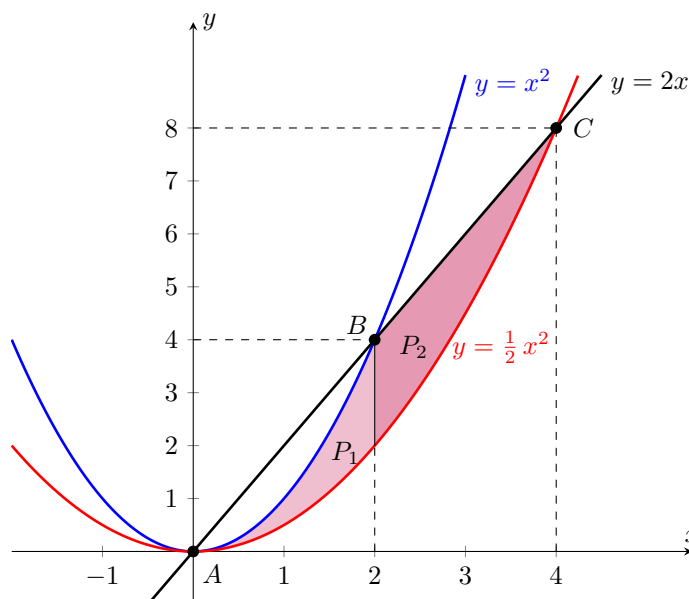
Parabole $y = x^2$ i $y = \frac{1}{2}x^2$ se dodiruju u tački $A(0,0)$.

Tačke preseka parabole $y = x^2$ i prave su

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \Rightarrow A(0,0), B(2,4),
 \end{aligned}$$

a tačke preseka parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ i prave su

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}x^2 &= 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \Rightarrow A(0,0), C(4,8).
 \end{aligned}$$



Sa slike vidimo da je tražena oblast na intervalu $(0, 2)$ ograničena parabolama, a na intervalu $(2, 4)$ pravom i parabolom $y = \frac{1}{2}x^2$.

Otuda je

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 + \left(x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_2^4 \\ &= \frac{8}{6} - 0 + 16 - \frac{64}{6} - 4 + \frac{8}{6} = 4. \end{aligned}$$

Zadatak 6.15. Izračunati površinu figure ograničene kružnicom $x^2 + y^2 = 8$ i parabolama $y^2 = 7x$ i $y = x^2 - x$, tako da tačka $(1, 1)$ pripada datoj figuri.

Rešenje.

Da bismo mogli da skiciramo crtež potrebno je odrediti presečne tačke. U ovom primeru će dovoljno biti da odredimo presečne tačke kružnice sa parabolama.

Nađimo presek kružnice i parabole $y^2 = 7x$.

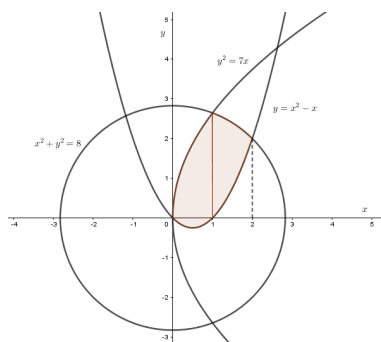
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 8 \wedge y^2 = 7x &\Rightarrow x^2 + 7x - 8 = 0 \\ &\Rightarrow (x + 8)(x - 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = -8 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Kako x mora biti pozitivno zbog jednačine parabole $y^2 = 7x$, sledi da se parabola i prava seku u tačkama $(1, \sqrt{7})$ i $(1, -\sqrt{7})$.

Nađimo presek kružnice i parabole $y = x^2 - x$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 8 \wedge y = x^2 - x &\Rightarrow x^2 + (x^2 - x)^2 = 8 \Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8 = 0 \\ &\Rightarrow x^3(x - 2) + 2(x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^3 + 2x + 4) = 0 \end{aligned}$$

Možemo uočiti da je jedno rešenje ove jednačine $x = 2$ i to je zapravo traženo x , drugo x je negativno što zaključujemo iz oblika parabole.



Kako nama treba oblast u kojoj je tačka $(1, 1)$ u unutrašnjosti kružnice i pošto tačke $(1, \sqrt{7})$ i $(1, 0)$ pripadaju prvoj, odnosno drugoj paraboli, iz odnosa njihovih y -koordinata $0 < 1 < \sqrt{7}$ sledi da je tražena oblast baš osenčena oblast sa slike. Konačno,

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^1 (\sqrt{7x} - (x^2 - x)) dx + \int_1^2 (\sqrt{8-x^2} - (x^2 - x)) dx \\
&= \left(\sqrt{7} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x}{2} \sqrt{8-x^2} + \frac{8}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 + 4 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + 4 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{(4-3)\sqrt{7}}{6} + \frac{13}{6} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} - 4 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{6} + \frac{4}{3} + \pi - 4 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Napomena 6.16. Morali smo da podelimo oblast (a onda i integral) na dva dela zato što gonja funkcija nije ista na intervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$. Generalno, čim se negde promeni donja ili gornja funkcija koja ograničava oblast, potrebno je u toj tački promene podeliti oblast, a samim tim moramo i više integrala računati.

Takođe, voditi računa da parabola $y^2 = 7x$ ima dva kraka $y = \sqrt{7x}$ i $y = -\sqrt{7x}$, ali nama je u ovom zadatku bio potreban samo krak $y = \sqrt{7x}$.

6.3. Dužina luka krive

Pretpostavimo da je u ravni definisana kriva sa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gde funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod $f'(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Dužina luka krive $y = f(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Zadatak 6.17. Izračunati dužinu luka krive $y = \ln \cos x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Rešenje. Za funkciju $y = \ln \cos x$ je $y' = -\frac{\sin x}{\cos x}$, te je na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ dužina luka krive

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Zadatak 6.18. Naći dužinu luka krive $y^2 - 2 \ln y - 4x = 0$ od $x = \frac{1}{4}$ do $x = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}$.

Rešenje. Pošto je teško ovu krivu izraziti kao $y = y(x)$, izrazićemo je kao $x = x(y)$, tj. $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$.

Znači, x i y će zameniti uloge. Treba nam i $x' = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y} = \frac{y^2 - 1}{2y}$.

Za $x = \frac{1}{4}$ imamo $y^2 - 2 \ln y = 1 \Rightarrow y = 1$.

Za $x = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}$ imamo $y^2 - 2 \ln y = e^2 - 2 \Rightarrow y = e$.

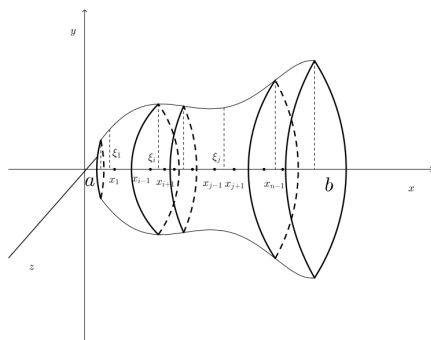
Kako iz izvoda inverzne funkcije znamo $y' = \frac{1}{x'}$, sledi $dx = x' dy$, odnosno

$$\sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \frac{1}{(x')^2}} x' dy = \sqrt{1 + (x')^2} dy.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{y^2 - 1}{2y}\right)^2} dy = \int_1^e \sqrt{\frac{4y^2 + y^4 - 2y^2 + 1}{4y^2}} \\ &= \int_1^e \sqrt{\frac{(y^2 + 1)^2}{(2y)^2}} dy = \int_1^e \frac{y^2 + 1}{2y} dy = \frac{1}{2} \int_1^e y dy + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{4} y^2 \Big|_1^e + \frac{1}{2} \ln |y| \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 - 1) + \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

6.4. Zapremina obrtnih tela



Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom $[a, b]$. Ako je krivolinijski trapez, čije stranice su interval $[a, b]$, delovi pravih $x = a$ i $x = b$ i kriva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, obrće oko x -ose, dobija se obrtno telo.

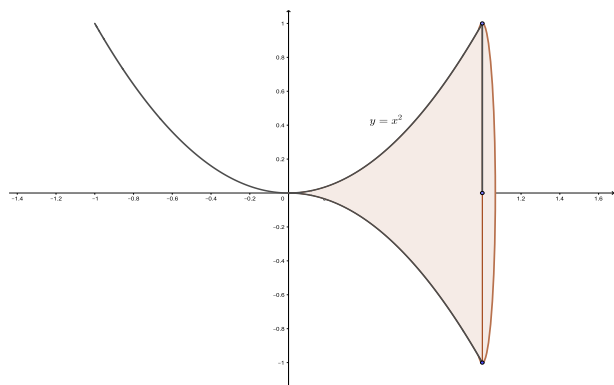
Zapremina tela dobijenog obrtanjem krive $y = f(x)$ oko x -ose nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

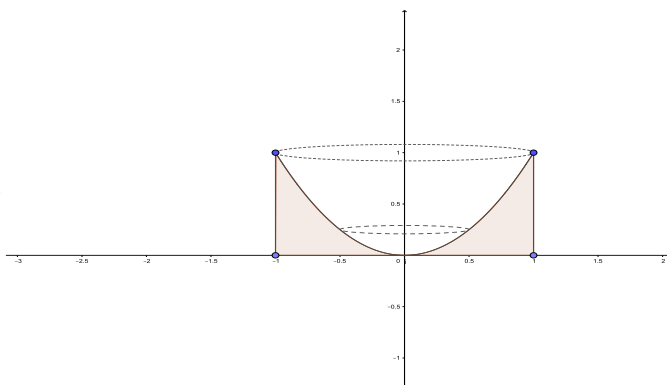
Zadatak 6.19. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure ograničene parabolom $y = x^2$, i pravim $x = 0$, $x = 1$,

- a) oko x -ose,
- b) oko y -ose.

Rešenje.



(a) oko x -ose



(b) oko y -ose

Telo, predstavljeno na slici pod a), ima zapreminu jednaku,

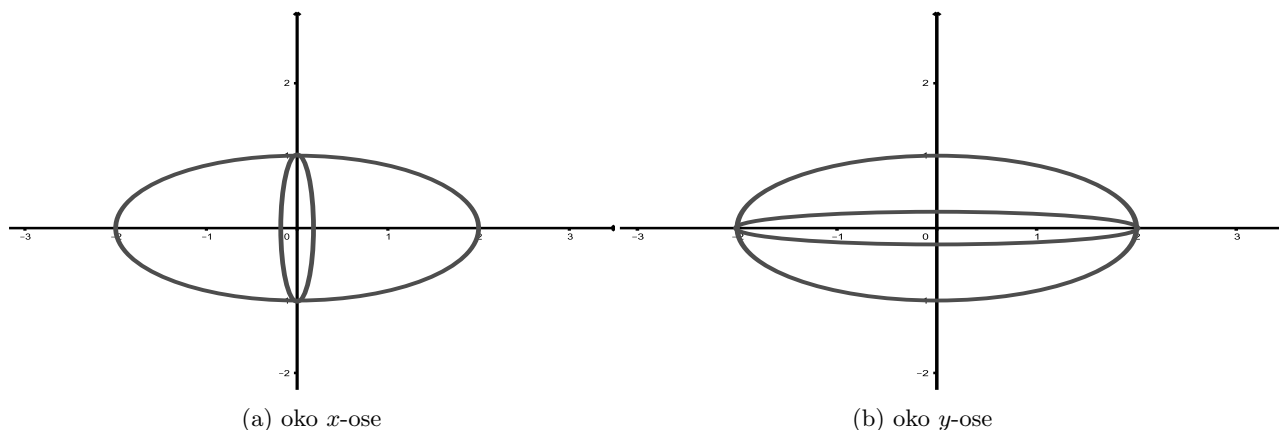
$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - 0 \right) = \frac{\pi}{5}.$$

S obzirom da je posmatrano telo određeno rotacijom figure oko y -ose neophodno je prethodno odrediti inverznu funkciju funkcije $y = x^2$. Tako za $y(x) = x^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, imamo $x = \sqrt{y} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Dalje, kao što se sa slike može uočiti, tražena zapremina predstavlja razliku zapremina tela koja nastaju rotacijom prave $x = 1$ i krive $x = \sqrt{y}$, $y \in [0, 1]$ oko y -ose, te imamo

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 1^2 dy - \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \left(y \Big|_0^1 - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right) \\ &= \pi \left(1 - 0 - \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.20. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, oko x ose, i y -ose.



- a) Da bismo odredili zapreminu posmatanog tela, odnosno elipsoida neophodno je prethodno jednačinu elipse predstaviti kao familju odgovarajućih krivih određenih na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ &\Leftrightarrow y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \\ &\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} \end{aligned}$$

gde $y = +\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)}$ i $y = -\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)}$, određuju gornju tj. pozitivnu, i donju tj. negativnu granu elipse. Posmatrani elipsoid je tada određen rotacijom bilo koje od dve pomenute grane. Takođe, s obzirom da je elipsa simetrična u odnosu na y -osu, traženu zapreminu možemo dobiti na sledeći način,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a (y(x))^2 dx = 2\pi \int_0^a (y(x))^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = 2b^2\pi \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_0^a \\ &= 2b^2\pi \left(a - \frac{a^3}{3a^2} \right) = 2b^2\pi \cdot \frac{2a}{3} = \frac{4}{3}ab^2\pi. \end{aligned}$$

- b) Za razliku od zadatka pod a), sada je potrebno najpre izraziti x preko y , na sledeći način,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \\ &\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)}. \end{aligned}$$

Primetimo, $x = +\sqrt{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$ i $x = -\sqrt{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$, određuju desnu tj. pozitivnu, i levu tj. negativnu granu elipse. Posmatrani elipsoid je tada određen rotacijom bilo koje od dve pomenute grane, a pošto je elipsa simetrična u odnosu na x -osu, traženu zapreminu možemo dobiti na sledeći način,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-b}^b (x(y))^2 dy = 2\pi \int_0^b (x(y))^2 dy \\ &= 2\pi \int_0^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2a^2\pi \left(x - \frac{y^3}{3b^2}\right) \Big|_0^b \\ &= 2a^2\pi \left(b - \frac{b^3}{3b^2}\right) = 2a^2\pi \cdot \frac{2b}{3} = \frac{4}{3}a^2b\pi. \end{aligned}$$

Zadatak 6.21. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem oko x -ose figure između krivih $y = (x-1)^2$ i $y = x+1$.

Rešenje.

Odredimo najpre presek datih krivih

$$x^2 - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3.$$

Primetimo da su na intervalu $[0, 3]$ obe krive iznad x -ose. Traženu zapreminu V ćemo odrediti kao razliku zapremine V_1 tela dobijenog obrtanjem prave $y = x+1$ oko x -ose i zapremine V_2 tela dobijenog obrtanjem parabole $y = (x-1)^2$ oko x -ose.

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^3 (x+1)^2 dx - \pi \int_0^3 (x-1)^4 dx \\ &= \left[\begin{array}{l} x+1 = t \Rightarrow dx = dt \\ x=0 \rightarrow t=1; x=3 \rightarrow t=4 \\ x-1 = z \Rightarrow dx = dz \\ x=0 \rightarrow z=-1; x=3 \rightarrow z=2 \end{array} \right] \\ &= \pi \int_1^4 t^2 dt - \pi \int_{-1}^2 z^4 dz = \pi \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^4 - \pi \cdot \frac{z^5}{5} \Big|_{-1}^2 \\ &= \frac{\pi}{3}(4^3 - 1^3) - \frac{\pi}{5}(2^5 - (-1)^5) = \frac{72\pi}{5}. \end{aligned}$$

6.5. Površina omotača obrtnih tela

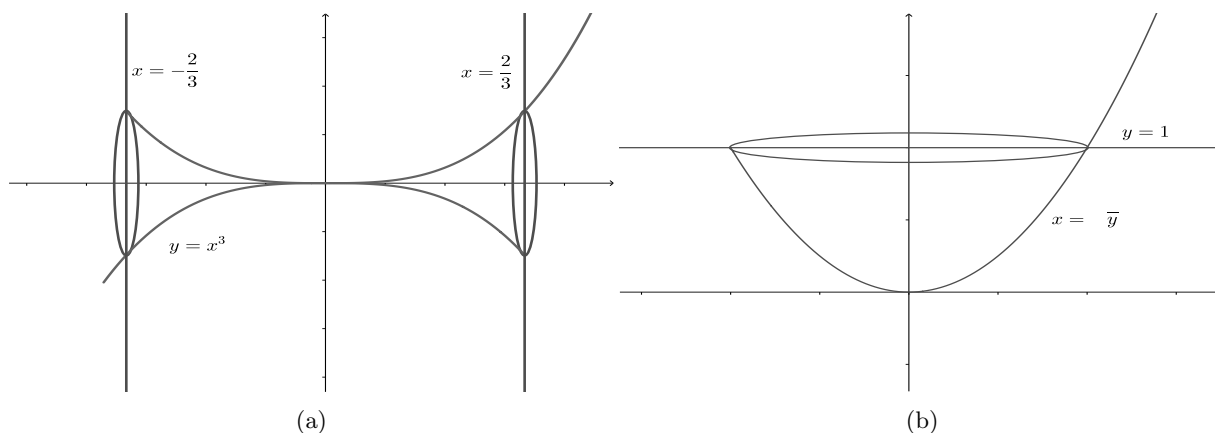
Definišimo površinu omotača obrtnog tela, koje se dobija obrtanjem krivolinijskog trapeza, čije stranice su interval $[a, b]$, delovi pravih $x = a$ i $x = b$ i kriva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, oko x -ose. Funkcija $f(x)$ je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Površina M omotača obrtnog tela je

$$M = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Zadatak 6.22. Izračunati površinu omotača tela koje nastaje rotacijom figure ograničene sledećim krivim:

- krivom $y = x^3$ i pravama $x = -\frac{2}{3}$ i $x = \frac{2}{3}$, oko x -ose.
- krivom $x = \sqrt{y}$ i pravom $y = 1$, oko y -ose.

Rešenje.



(a) Primitimo prvo da je telo koje se dobija rotacijom oko x -ose dela krive $y = x^3$ za $x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ osno-simetrično u odnosu na y -osu. Tada tražena površina omotača tela $M = 2 \cdot M_1$, gde M_1 predstavlja površinu omotača tela određenog rotacijom dela posmatranog luka krive $y = x^3$ koji se nalazi u prvom kvadrantu. Otuda, imamo sledeće:

$$\begin{aligned}
 M &= 2 \cdot M_1 = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{2}{3}} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \\
 &= 4\pi \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \left[\begin{array}{ll} 1 + 9x^4 = t^2 & \Rightarrow 36x^3 dx = 2t dt \\ x = 0 & \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{2}{3} & \Rightarrow t = \frac{5}{3} \end{array} \right] \\
 &= 4\pi \int_1^{\frac{5}{3}} t \cdot \frac{t dt}{18} = \frac{2}{9}\pi \int_1^{\frac{5}{3}} t^2 dt = \frac{2\pi}{9} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\frac{5}{3}} = \frac{2\pi}{27} \left(\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 1^3 \right) \\
 &= \frac{2\pi}{27} \cdot \frac{98}{27} = \frac{196\pi}{729}.
 \end{aligned}$$

(b) Kako je $x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ imamo sledeće:

$$\begin{aligned}
 M &= 2\pi \int_0^1 x(y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2} dy \\
 &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{y + \frac{1}{4}} dy \\
 &= \left[\begin{array}{lll} y + \frac{1}{4} = t^2 & \Rightarrow dy = 2t dt \\ y = 0 & \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ y = 1 & \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{array} \right] = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} t \cdot 2t dt \\
 &= 4\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} t^2 dt = 4\pi \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{5\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).
 \end{aligned}$$

Zadatak 6.23. Izračunati površinu omotača tela koje nastaje rotacijom figure ograničene kružnicom $x^2 + y^2 = a^2$ i pravom $y = a - x$ (koja se nalazi u prvom kvadrantu) oko x -ose.

Rešenje.

Nađimo presek kružnice i prave

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 = a^2 \wedge y = a - x &\Rightarrow x^2 + (a - x)^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = a^2 \\
 &\Rightarrow 2x(x - a) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = a.
 \end{aligned}$$

U prvom kvadrantu jednačina kružnice je

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Traženu površinu M određujemo kao zbir površine omotača M_1 tela koje nastaje obrtanjem krive $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (u prvom kvadrantu) oko x -ose i površine omotača M_2 tela koje nastaje obrtanjem prave $y = a - x$ (u prvom kvadrantu) oko x -ose. Kako je

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2},$$

imamo

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_0^a a dx = 2a\pi \cdot x \Big|_0^a = 2a^2\pi. \end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned} M_2 &= 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^a (a - x) \sqrt{1 + (-1)^2} dx \\ &= 2\sqrt{2} \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = 2\sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = a^2\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Sada je

$$M = M_1 + M_2 = 2a^2\pi + a^2\pi\sqrt{2} = a^2\pi(2 + \sqrt{2}).$$

Napomena 6.24. Površina M_1 je površina polusfere poliprečnika $r = a$, pa je $M_1 = \frac{1}{2} \cdot 4r^2\pi = 2a^2\pi$, a površina M_2 je površina omotača kupe poluprečnika osnove $r = a$ i izvodnice $s = a\sqrt{2}$, pa je $M_2 = r s \pi = a^2\pi\sqrt{2}$.

6.6. Zadaci za samostalni rad

1. Koristeći integralnu sumu izračunati $\int_0^1 2^x dx$.

2. Primenom određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{a_n\}$, gde je

$$a_n = n \left(\frac{1}{1^2 + 4n^2} + \frac{1}{2^2 + 4n^2} + \frac{1}{3^2 + 4n^2} + \dots + \frac{1}{5n^2} \right).$$

3. Naći površinu ograničenu krivama $y = x^2 - 2x - 1$ i $y = -x^2 + 3$.

4. Izračunati površinu između pravih $x = a$, ($0 < a < 1$) i $x = 1$, koju ograničavaju kriva $y = \sqrt{x} \ln^2 x$ i x -osa.

5. Naći dužinu astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

6. Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure F oko x -ose, ako je figura F oblast ograničena krivama $y = e^x - 1$, $y = \frac{x}{2}$ i pravom $x = 2$.

7. Naći površinu torusa nastalog rotacijom kružnice $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ oko x -ose ($a > b$).