INTEGRALI

- Na prethodnoj prezentaciji smo videli graničnu vrednost:

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty}[\,f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\Delta x]$$

koja se pojavljuje pri računanju površine ispod krive.

INTEGRALI

- Ovaj tip granične vrednosti se pojavljuje i u raznim situacijama u kojima funkcija f ne mora biti obavezno nenegativna.

INTEGRALI

- Granične vrednosti tipa (1) se pojavljuju pri određivanju:
  - Zapremine obrtnog tela
  - Dužine luka krive
  - Površine omotača obrtnog tela

  - Rada, težišta tela,...

INTEGRALI

- Zato granična vrednost ovog tipa ima svoje posebno ime i oznaku.

Određeni integral

ODREĐENI INTEGRAL

Definicija 1

- Ako je f **ograničena** funkcija definisana za $a \leq x \leq b$, interval $[a, b]$ delimo na n jednakih podintervala.
  - Neka su $x_0(= a) < x_1 < x_2 < \ldots < x_n(= b)$ krajevi tih podintervala. Širina svakog podintervala je $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
  - Neka su $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ proizvoljno odabrane tačke iz podintervala, tako da se x_i^* nalazi u i-tom podintervalu.

ODREĐENI INTEGRAL

Definicija 1

- Tada, određeni integral funkcije f od a do b je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

ako ova granična vrednost postoji.

- Ako funkcija f ima određeni integral, onda kažemo da je f integrabilna na $[a, b]$.

ODREĐENI INTEGRAL

- Podsetimo se šta to znači da granična vrednost, kojom je određeni integral definisan, postoji:
  - Za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_o takav da za svako $n \geq n_o$ i proizvoljan izbor tačaka $x_i{*}$ iz $[x_{i-1}, x_i]$, važi:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i{*})\Delta x \right| < \varepsilon$$

ODREĐENI INTEGRAL

- Simbol $\int$ je uveo nemački matematičar (koji je bio još i filozof, pronalazač, pravnik, istoričar, diplomata) Gotfrid Lajbnic (1646.-1716.)
  - Ovaj simbol predstavlja izduženo slovo *S*.
  - Odabrano je zato što je određeni integral granična vrednost sume.

NOTACIJA

- U oznaci $\int_a^b f(x)\,dx$,
  - $f(x)$ je podintegralna funkcija ili integrand.
  - a i b su granice integracije;
    a je donja granica, a b gornja granica.
  - U integralu $\int_a^b f(x)\,dx$ dx ukazuje na to šta je nezavisna promenljiva.

ODREĐENI INTEGRAL

- Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ je broj!
- On ne zavisi od *x*.

- Možemo koristiti bilo koje drugo slovo umesto *x* i vrednost određenog integrala se neće promeniti:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$$

RIMANOVA SUMA

- Suma $$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

koja se pojavljuje u definiciji određenog integrala se zove Rimanova suma.

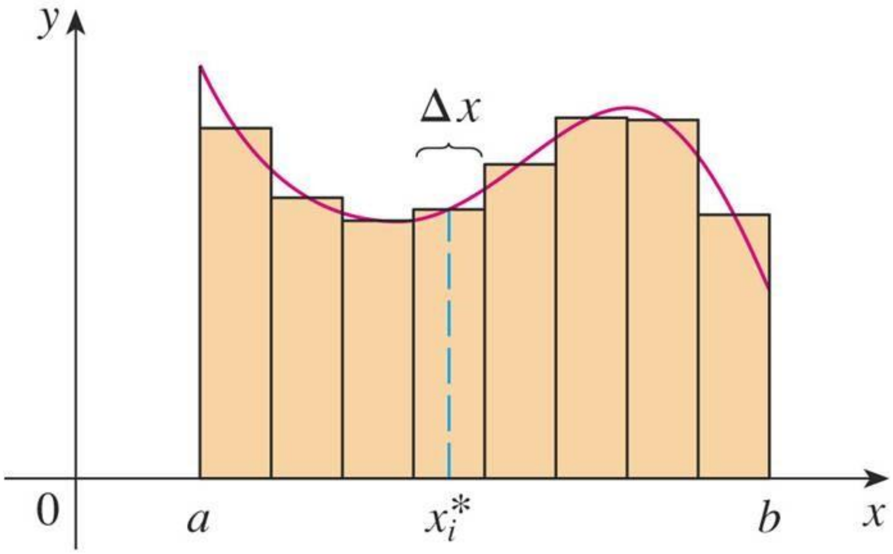
  - Nazvana je po nemačkom matematičaru Bernhardu Riemanu (1826.–1866.)

RIMANOVA SUMA

- Dakle, Definicija 1 nam kaže da se određeni integral integrabilne funkcije može aproskimirati sa proizvoljnom tačnošću pomoću Rimanove sume.

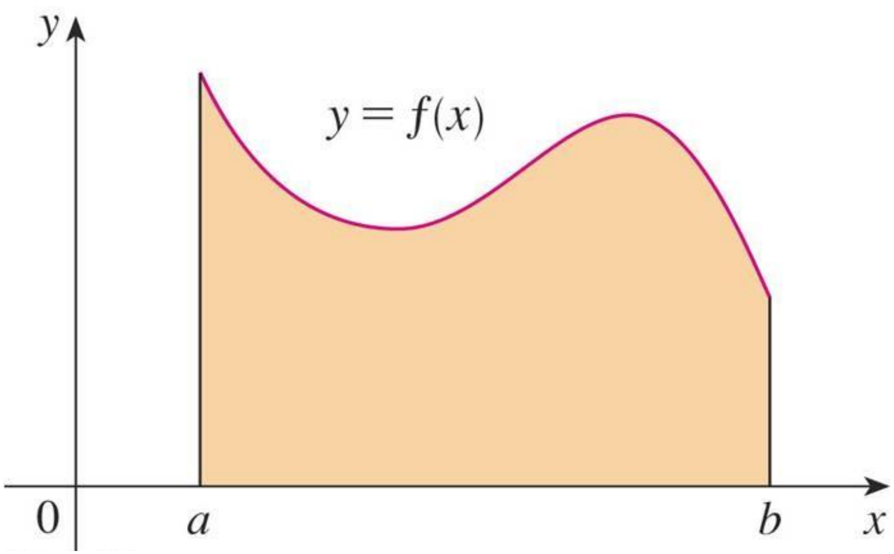
RIMANOVA SUMA

- Znamo već da ako je *f* nenegativna funkcija, da se onda Rimanova suma može interpretirati kao:
  - suma površina aproksimirajućih pravougaonika



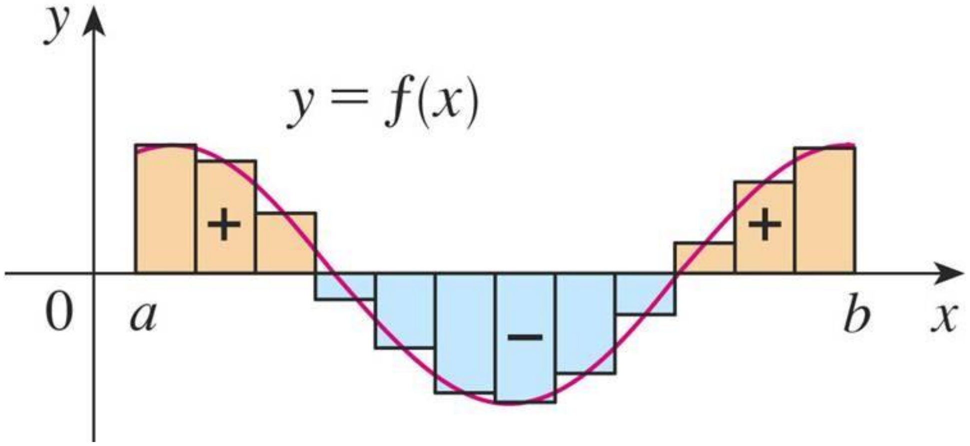
RIMANOVA SUMA

- Dakle, poredeći Definiciju 1 sa definicijom površine ispod krive sa prethodnih slajdova, vidimo da se određeni integral nenegativne funkcije $\int_a^b f(x)\,dx$ može interpretirati kao:
  - površina ispod krive $y = f(x)$ od a do b



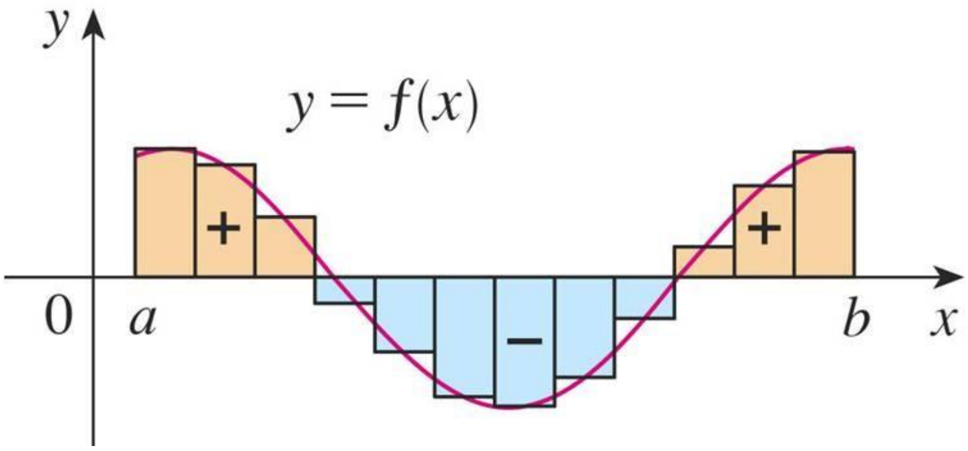
RIMANOVA SUMA

- Ako f uzima i pozitivne i negativne vrednosti, onda je Rimanova suma:
  - Zbir površina pravougaonika koji se nalaze iznad x-ose i negativnih vrednosti površina pravougaonika koji se nalaze ispod x-ose
  - Na slici: površine narandžastih pravougaonika minus površine plavih parvougaonika



RIMANOVA SUMA

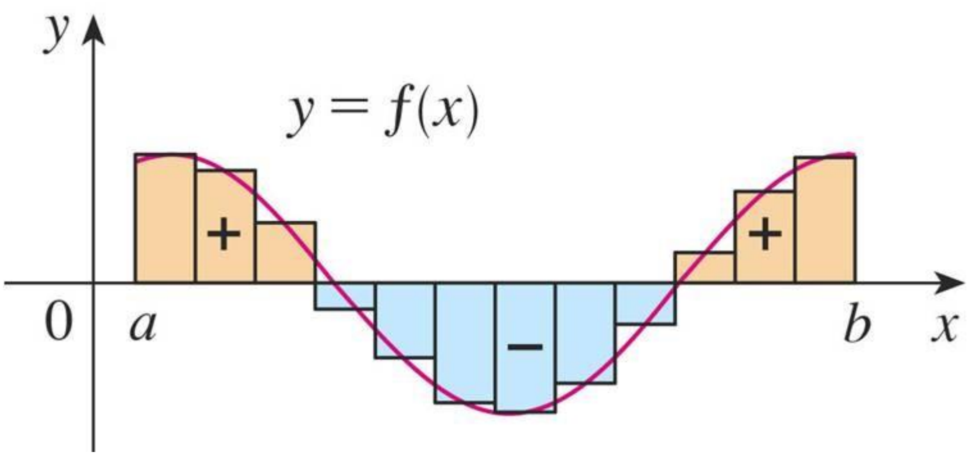
- Kada se računa granična vrednost takve Rimanove sume, onda se dobija situacija ilustrovana na slici.



NETO POVRŠINA

- Tada se određeni integral može interpretirati kao "neto" površina, tj. kao razlika površina:
  - P_1 je površina oblasti iznad x-ose a ispod grafika funkcije f.
  - P_2 je površina oblasti ispod x-ose a iznad grafika funkcije f.

$$\int_a^b f(x)dx = P_1 - P_2$$



PODINTERVALI

- Iako smo ovde definisali $\int_a^b f(x)\,dx$ deleći interval $[a, b]$ na podintervale jednakih širina, postoje situacije u kojima je bolje da su podintervali različitih širina.

PODINTERVALI

- Ako su širine podintervala $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, treba da budemo sigurni da će sve te širine da teže nuli u graničnom procesu.
  - To se obezbeđuje tako što se stavi da max Δx_i teži ka nuli.

PODINTERVALI

- Tako da u ovom slučaju, definicija određenog integrala glasi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

INTEGRABILNE FUNKCIJE

- Nisu sve funkcije integrabilne, ali sledeća teorema govori o tome da veliki broj upravo onih funkcija sa kojima radimo to jeste.

INTEGRABILNE FUNKCIJE

Teorema 1

- Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, ili ako f ima samo konačan broj prekida (skokova), tada je f integrabilna na $[a, b]$, tj. određeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ postoji.

INTEGRABILNE FUNKCIJE

- Da bi izračunavanje određenog integrala po definiciji bilo što jednostavnije, obično se uzimaju tačke koje su desni krajevi podintervala.
  - $x_i^* = x_i$ i onda definicija postaje jednostavnija.

INTEGRABILNE FUNKCIJE

- Ako je *f* integrabilna funkcija na [*a*, *b*], onda je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n_i \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

gde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = a + i\,\Delta x$$

ODREĐENI INTEGRAL

Primer 1

- Izraziti $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i^3 + x_i \sin x_i)\Delta x_i$$

  kao određeni integral na $[0, \pi]$.

  - Upoređujući datu graničnu vrednost sa graničnom vrednosti iz Teoreme 1, vidimo da će one biti jednake ako je $f(x) = x^3 + x \sin x$.

ODREĐENI INTEGRAL

Primer 1

- Granice su date: $a = 0$ i $b = \pi$.

- Dakle, na osnovu Teoreme 1 imamo:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,3} + x_i \sin x_i\right)\Delta x_i = \int_0^{\pi}\left(x^3 + x\sin x\right)dx$$

ODREĐENI INTEGRAL

- Na dalje, kada budemo primenjivali određeni integral, biće od velike važnosti da uočite i prepoznate ovakve granične vrednosti suma kao određene integrale (kao u Primeru 1).

ODREĐENI INTEGRAL

- Kada je Lajbnic uvodio notaciju za određeni integral, odabrao je oznake koje podsećaju na oznake koje se koriste u graničnom procesu kojim se integral definiše.

ODREĐENI INTEGRAL

- U opštem slučaju, kada pišemo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

  zamenjuje se:
  - lim Σ sa ∫
  - x_i^* sa x
  - Δx sa dx

OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

- U definiciji određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$, polazi se od pretpostavke da važi $a < b$.

- Međutim, definicija granične vrednosti Rimanove sume ima smisla i kada je $a > b$.

OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

- Primetimo da, ako a i b zamene mesta, onda je $\Delta x = (a - b)/n$.
- Tako da važi: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- Ako je $a = b$, onda je $\Delta x = 0$, dakle

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

- Neka su *f* i *g* neprekidne funkcije. Tada važi:

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$
2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
5. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

OSOBINA 1

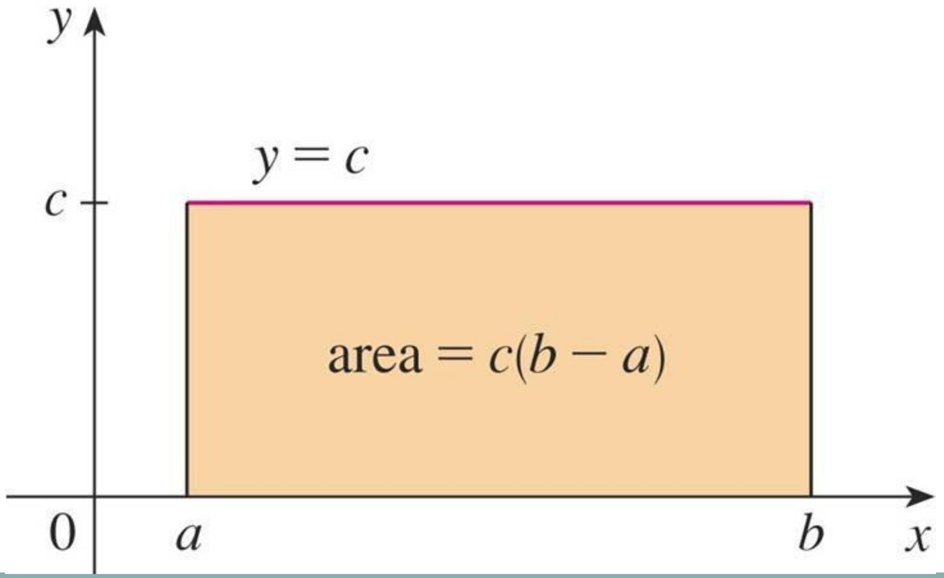
$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

gde je *c* proizvoljna konstanta.

- Osobina 1 govori o tome da je određeni integral konstantne funkcije $f(x) = c$ jednak toj konstanti pomnoženoj sa dužinom intervala.

OSOBINA 1

- Ako je $c > 0$ i $a < b$, onda je to očekivani rezultat jer je $c(b - a)$ upravo površina osenčenog pravougaonika.



OSOBINA 2

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

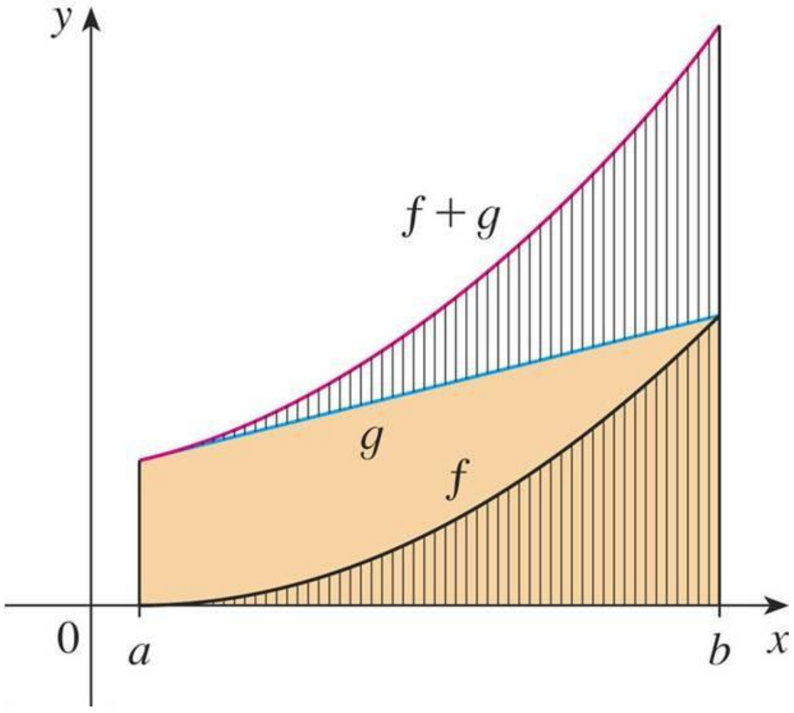
- Osobina 2 govori o tome da je određeni integral zbira dve funkcije jednak zbiru određenih integrala svake funkcije posebno.

OSOBINA 2

- Za nenegativne funkcije, može se reći da je površina ispod $f + g$ jednaka površini ispod f plus površini ispod g.

OSOBINA 2

- Slika nam pomaže da bolje uočimo da je to upravo tako.
  - Da bi se na slici bolje uočilo sabiranje dve funkcije, odgovarajuće vertikalne linije imaju istu visinu.



OSOBINA 2

- Osobina 2 sledi iz osobina graničnih vrednosti:

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x) \right] dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) + g(x_i) \right] \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

OSOBINA 3

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

gde je c proizvoljna konstanta.

- Osobina 3 se može dokazati na sličan način i govori o tome da je integral proizvoda konstante i funkcije jednak proizvodu konstante i integrala te funkcije.

  - To jest, konstanta (i jedino konstanta) se može izvući ispred znaka integrala.

OSOBINA 4

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- Osobina 4 se dobija stavljanjem $f - g = f + (-g)$ i onda na osnovu Osobina 2 i 3 sa c = -1.

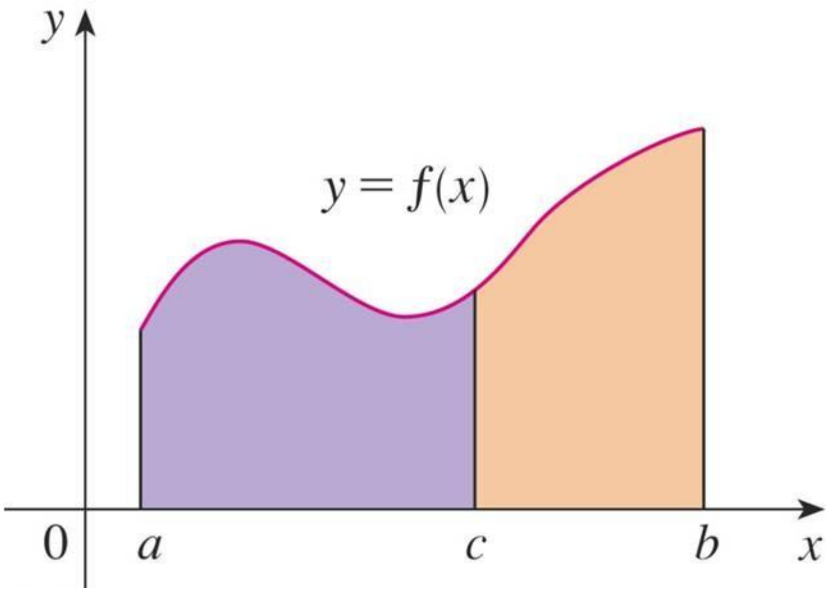
OSOBINA 5

- Osobina 5 govori o tome kako se mogu kombinovati integrali iste funkcije nad susednim intervalima:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

OSOBINA 5

- Dokaz ove osobine u opštem slučaju nije jednostavan, ali se u slučaju kada je $f(x) \geq 0$ i $a < c < b$, ova osobina može geometrijski interpretirati i taj slučaj vidimo na slici.
  - Površina ispod $y = f(x)$ od a do c plus površina od c do b jednaka je ukupnoj površini od a do b.



OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

- Osobine 1–5 važe u slučajevima:
  - $a < b$
  - $a = b$
  - $a > b$

OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

- Neka su *f* i *g* integrabilne funkcije na [a,b].
- Tada važi:
- 6. Ako je $f(x) \geq 0$ za $a \leq x \leq b$, onda važi $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$
- 7. Ako je $f(x) \geq g(x)$ za $a \leq x \leq b$, onda važi $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
- 8. Ako je $m \leq f(x) \leq M$ za $a \leq x \leq b$, onda važi

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

OSOBINA 6

Ako je $f(x) \geq 0$ za $a \leq x \leq b$, onda važi $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

- Za $f(x) \geq 0$, izraz $\int_a^b f(x)\,dx$ predstavlja površinu ispod grafika krive f.

OSOBINA 6

- Tako da je geometrijska interpretacija ove osobine da je površina ispod krive nenegativna.
  - Ova osobina se može dokazati pomoću definicije određenog integrala.

OSOBINA 7

Ako je $f(x) \geq g(x)$ za $a \leq x \leq b$, onda važi $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

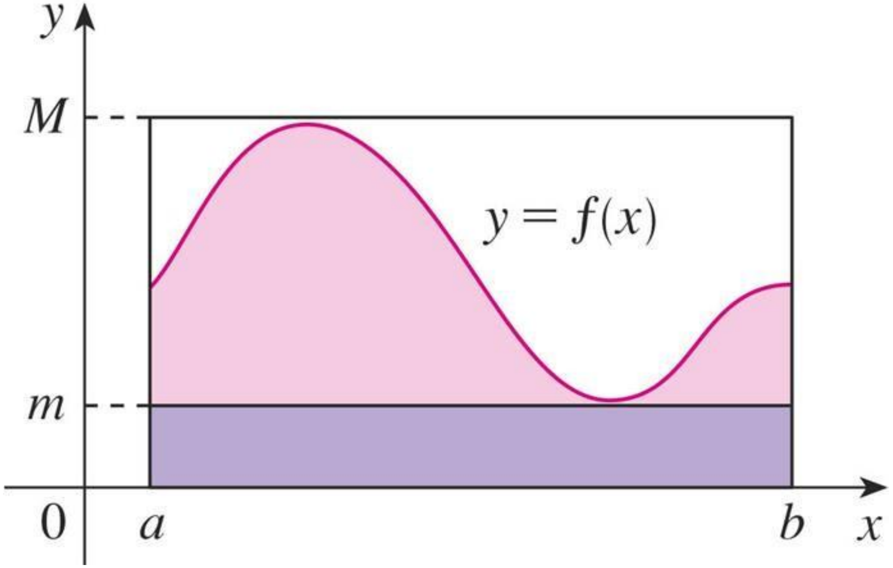
- Osobina 7 govori da je vrednost određenog integrala veće funkcije veća.
  - Ova osobina sledi iz Osobina 6 i 4 jer je $f - g \geq 0$.

OSOBINA 8

- Osobina 8 će ovde biti ilustrovana u slučaju kada je $f(x) \geq 0$.

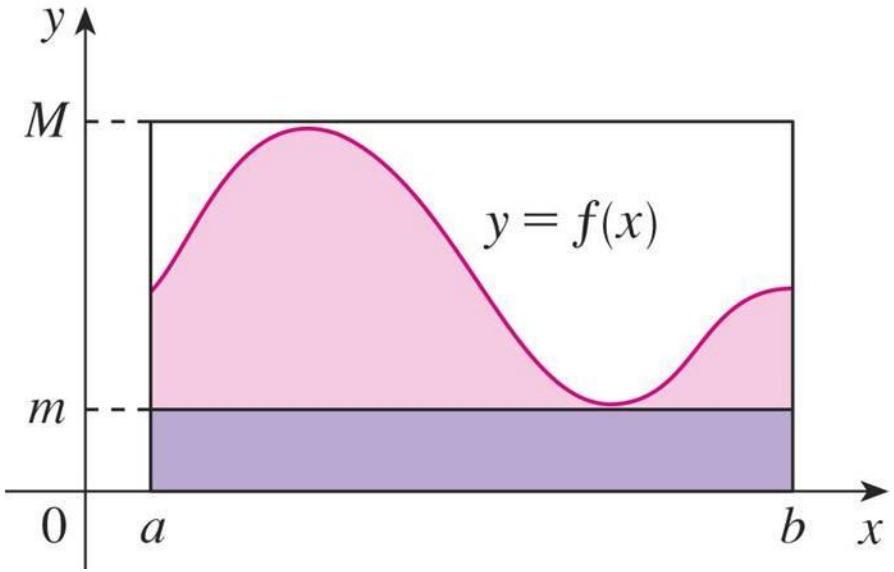
Ako je $m \leq f(x) \leq M$ za $a \leq x \leq b$, onda važi

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$



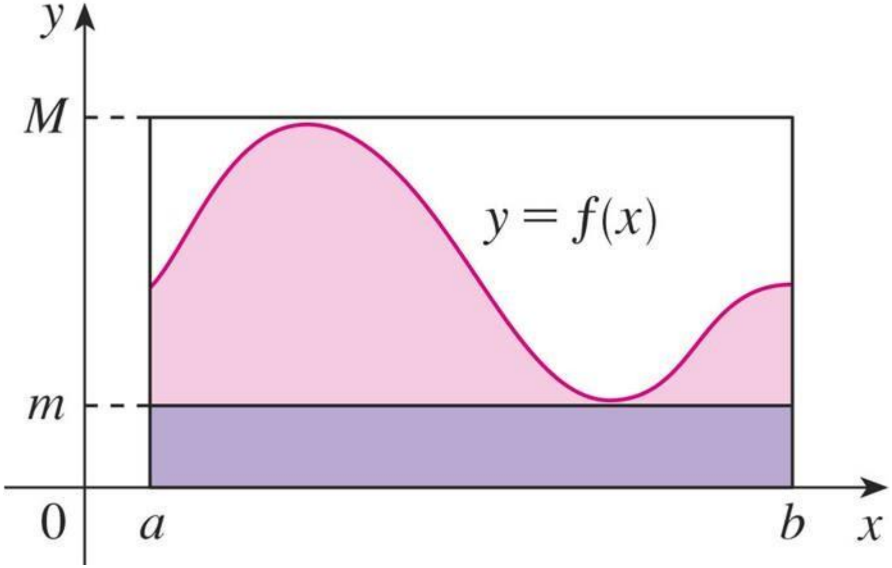
OSOBINA 8

- Ako je f neprekidna funkcija, m i M su globalni minimum i maksimum od f na $[a, b]$.



OSOBINA 8

- U tom slučaju, Osobina 8 govori o tome da je:
  - površina ispod grafika funkcije f veća od površine pravougaonika visine m i manja od površine pravougaonika čija je visina M.



OSOBINA 8—DOKAZ

- Kako je $m \le f(x) \le M$, na osnovu Osobine 7 sledi:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

- Koristeći Osobinu 1 za izračunavanje integrala sa leve i desne strane, dobija se:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

OSOBINA 8

Primer 2

- Koristeći Osobinu 8 proceniti vrednost integrala $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

  - $f(x) = e^{-x^2}$ je opadajuća funkcija na [0, 1].
  - Dakle, njen globalni maksimum je $M = f(0) = 1$, a globalni minimum $m = f(1) = e^{-1}$.

OSOBINA 8

Primer 2

- Tako se na osnovu Osobine 8 dobija:

$$e^{-1}(1-0) \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1(1-0)$$

tj.

$$e^{-1} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$$

- Kako je $e^{-1} \approx 0.3679$, imamo:

$$0.367 \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$$

OSOBINA 8

- Rezultat iz Primera 2 je ilustrovan na slici.
  - Integral je veći od površine donjeg pravougaonika i manji od površine jediničnog kvadrata.