Fundamentalna teorema integralnog računa

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Fundamentalna teorema integralnog računa je najvažnija teorema u ovoj oblasti.
  - Ona povezuje diferencijalni i integralni račun.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Diferencijalni račun je nastao iz problema traženja tangente na proizvoljnu krivu.
- A integralni račun je nastao iz problema određivanja površine ispod krive, koji na prvi pogled nije u vezi sa problemom tangente.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Njutnov mentor na Kembridžu, Isak Barou (1630.–1677.), otkrio je da između ta dva problema postoji bliska veza.

  - On je shvatio da su procesi diferenciranja i integracije zapravo inverzni procesi.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Fundamentalna teorema daje preciznu inverznu vezu između izvoda i integrala.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Njutn i Lajbnic su iskoristili ovu vezu i razvili diferencijalni i integralni račun u jedan sistematičan matematički metod.

  - Posebno važno je to što je Fundamentalna teorema omogućila izračunavanje površine i određenih integrala bez računanja granične vrednosti sume!

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Prvi deo teoreme govori o funkcijama definisanim na sledeći način

(1)
$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

gde je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, a x se nalazi između a i b.

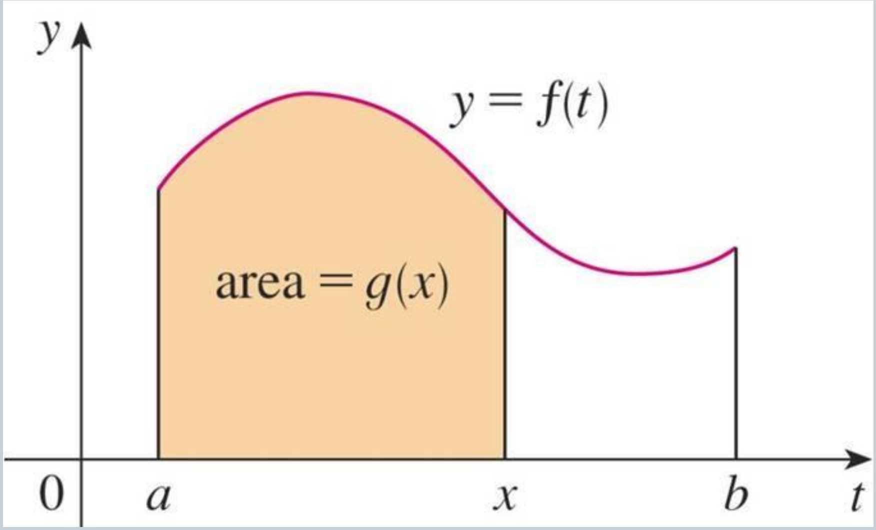
FUNDAMENTALNA TEOREMA

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

- Treba uočiti da je g funkcija od x, a da se promenljiva x nalazi u gornjoj granici integrala.
- Kada je x neki fiksirani broj, onda je integral $\int_a^x f(t)\,dt$ određeni broj.
- Ako pustimo da x varira, onda se broj $\int_a^x f(t)\,dt$ takođe menja i definiše funkciju od x koja je označena sa $g(x)$.

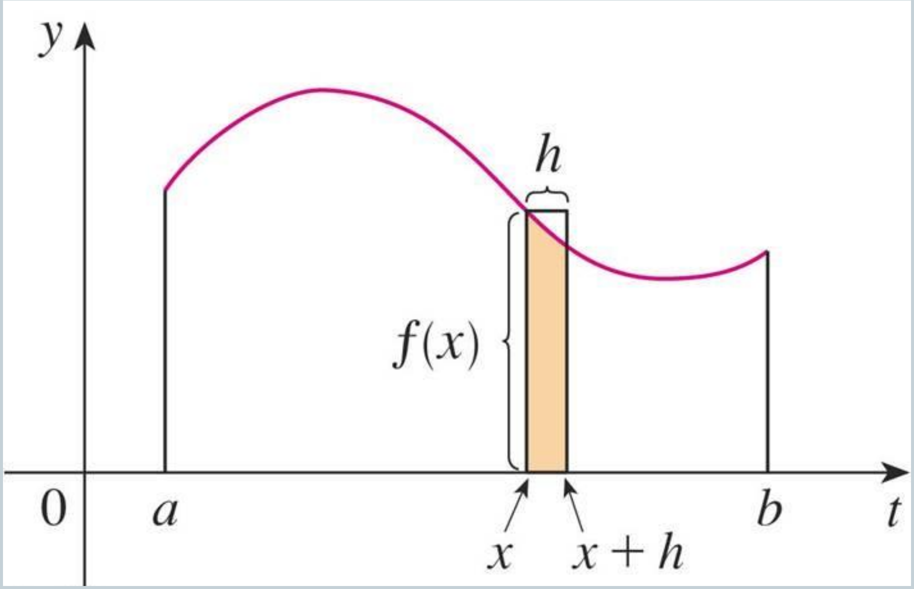
FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Neka je f neprekidna funkcija za koju na intervalu [a,b] važi $f(x) \geq 0$.
  - Tada se $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ može interpretirati kao površina ispod grafika krive f od a do x.



FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Da bi se na osnovu definicije izračunao izvod $g'(x)$, prvo treba uočiti da se za $h > 0$, razlika $g(x + h) - g(x)$ dobija oduzimanjem površina.
  - Ta razlika je površina ispod grafika funkcije f od x do $x + h$ (obojena površina).



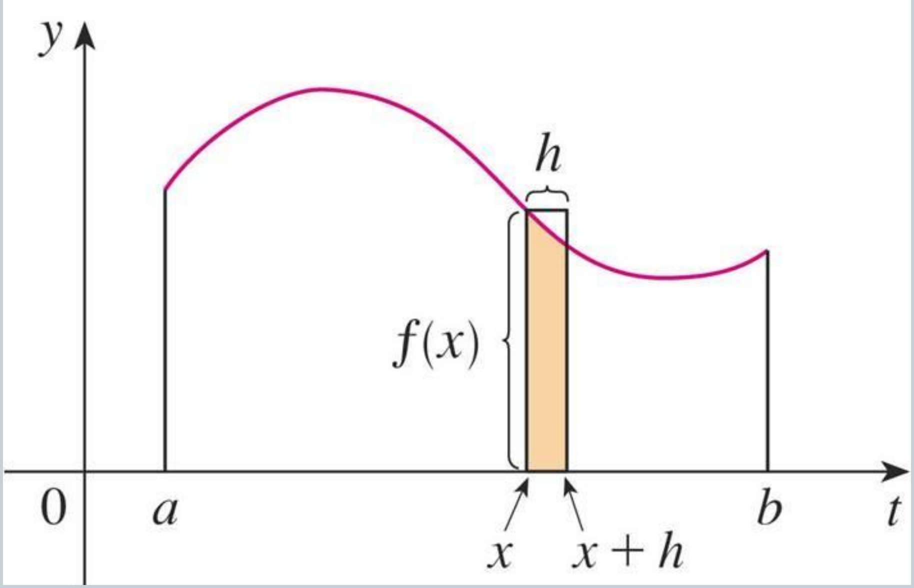
FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Za malo h, može se videti da je ova površina približno jednaka površini pravougaonika visine $f(x)$ i širine h:

- Dakle, $g(x+h)-g(x) \approx hf(x)$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\approx f(x)$$



FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Intuitivno, očekujemo da važi:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

  - Ova činjenica je tačna, čak i kada *f* nije obavezno nenegativna funkcija i predstavlja prvi deo Fundamentalne teoreme integralnog računa.

FUNDAMENTALNA TEOREMA, formulacija (prvi deo)

- Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ i neka je funkcija g definisana sa

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \le x \le b$$

Tada je g neprekidna funkcija na $[a, b]$, diferencijabilna na (a, b) i važi

$$g'(x) = f(x).$$

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Prvi deo fundamentalne teoreme kaže da je izvod određenog integrala u odnosu na gornju granicu, jednak podintegralnoj funkciji izračunatoj u gornjoj granici.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

Primer 1

- Naći izvod funkcije

$$g(x)=\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$$

  - Kako je $f(t)=\sqrt{1+t^2}$ neprekidna funkcija, sledi:

$$g'(x)=\sqrt{1+x^2}$$

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Funkcija oblika $$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$ vam se može učiniti čudnom.
  - Međutim, u fizici, hemiji ili na primer statistici se često koriste ovakve funkcije.

FRENELOVA FUNKCIJA

- Primer: Frenelova funkcija

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2 / 2)\, dt$$

  - Funkcija se zove po francuskom fizičaru Augustinu Frenelu (1788.–1827.), čuvenom po svojim rezultatima iz optike.
  - Prvi put se pojavljuje u Frenelovoj matematičkoj teoriji difrakcije svetlosti.
  - A sada se koristi i pri dizajniranju krivina kod autoputeva i železničkih trasa.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

Primer 2

- Naći $$\frac{d}{dx}\int_{1}^{x^4}\sin t\,dt$$
  - Ovde se osim Fundamentalne teoreme mora primeniti i pravilo za izvod složene funkcije.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

Primer 2

- Neka je $u = x^4$.
- Tada,

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sin t\,dt = \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sin t\,dt$$

$$= \frac{d}{du}\left(\int_1^{u} \sin t\,dt\right)\frac{du}{dx} \quad \text{(izvod složene funkcije)}$$

$$= \sin u\,\frac{du}{dx} \;\text{(FT)}$$

$$= \sin(x^4)\cdot 4x^3$$

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Do sada smo određeni integral računali pomoću definicije - kao graničnu vrednost Rimanove sume. Ta procedura je često dugačka i komplikovana čak i za vrlo jednostavne podintegralne funkcije.

  - Drugi deo Fundamentalne teoreme, koji direktno sledi iz prvog dela, omogućava da se određeni integral mnogo lakše izračunava pomoću neodređenog integrala.

FUNDAMENTALNA TEOREMA, drugi deo, **Njutn-Lajbnicova formula**

- Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, onda važi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

gde je F primitivna funkcija za f na $[a, b]$, tj. funkcija za koju važi $F'(x) = f(x)$ za x iz $[a, b]$.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Drugi deo Fundamentalne teoreme, koji je poznat pod nazivom **Njutn-Lajbnicova formula**, kaže da ako znamo primitivnu funkciju *F* od *f*, onda određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ možemo izračunati kao razliku vrednosti *F* zamenjene u granicama integracije.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

Primer 3

- Izračunati integral $\int_1^3 e^x dx$
  - Funkcija $f(x) = e^x$ je neprekidna i njena primitivna funkcija je $F(x) = e^x$.
  - Dakle: $$\int_1^3 e^x dx = F(3) - F(1)$$ $$= e^3 - e$$

FUNDAMENTALNA TEOREMA

Primer 3

- Jasno je da u Njutn-Lajbnicovoj formuli možemo uzeti bilo koju primitivnu funkciju F od f.

- Uobičajeno je da se uzme najjednostavnija funkcija $F(x) = e^x$, umesto na primer $e^x + 7$ ili $e^x + C$.

Njutn-Lajbnicova formula

- Notacija koja se koristi: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
- Dakle, Njutn-Lajbnicova formula glasi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad \text{gde je} \quad F' = f$$

  - Druge oznake koje se još koriste su $F(x)\Big]_a^b$ i $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Njutn-Lajbnicova formula

Primer 4

- Naći površinu ispod parabole $y = x^2$ od 0 do 1.

  - Primitivna funkcija za $f(x) = x^2$ je $F(x) = (1/3)x^3$.
  - Tražena površina je:

$$P = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Njutn-Lajbnicova formula

- U poređenju sa izračunavanjem iste ove površine na Prezentaciji9.3 vidimo da se upotrebom Fundamentalne teoreme, tj. Njutn-Lajbnicove formule, ova površina može mnogo lakše izračunati.

Njutn-Lajbnicova formula

Primer 5

- Izračunati $\int_3^6 \frac{dx}{x}$

  - Primitivna funkcija za $f(x) = 1/x$ je $F(x) = \ln |x|$.
  - Kako je $3 \leq x \leq 6$, možemo uzeti $F(x) = \ln x$.

Njutn-Lajbnicova formula

Primer 5

- Stoga sledi:

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6$$

$$= \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln \frac{6}{3}$$

$$= \ln 2$$

Njutn-Lajbnicova formula

Primer 6

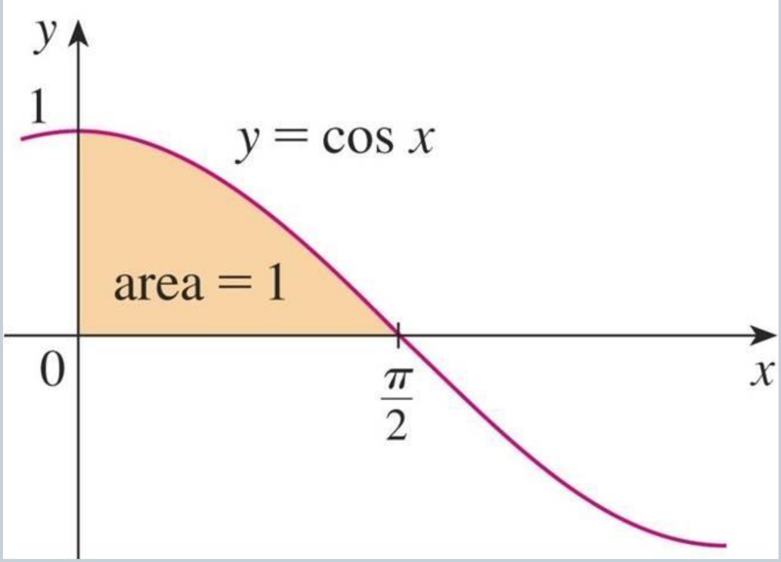
- Naći površinu kosinusne krive od 0 do b, gde je $0 \leq b \leq \pi/2$.
  - Primitivna funkcija za $f(x) = \cos x$ je $F(x) = \sin x$, tako da imamo:

$$P = \int_0^b \cos x dx = \sin x \Big|_0^b = \sin b - \sin 0 = \sin b$$

Njutn-Lajbnicova formula

Primer 6

- Ako se uzme da je $b = \pi/2$, onda je na ovaj način dokazano da je površina ispod kosinunse krive od 0 do $\pi/2$: $\sin(\pi/2) = 1$



Njutn-Lajbnicova formula

- Kada je francuski matematičar Žil de Roberval prvi izračunao površinu ispod sinusne i kosinusne krive 1635. godine, to je bio veoma težak i izazovan zadatak koji je zahtevao i dozu genijalnosti.

Njutn-Lajbnicova formula

- Bez Njutn-Lajbnicove formule, ovaj problem bi mogli da rešimo računajući graničnu vrednost sume:
  - Koristeći trigonometrijske identitete koji baš ne spadaju među osnovne identitete
  - Upotrebom nekih softvera

Njutn-Lajbnicova formula

- Za Robervala je to bio još teži zadatak.
  - Granične vrednosti, osobine i račun, tj. tehnika koja ih prati nije tada još bila osmišljena.

Njutn-Lajbnicova formula

- Međutim, 60-tih i 70-tih godina XVII veka, kada je Fundamentalnu teoremu otkrio Barou, a iskoristili je i razradili Njutn i Lajbnic, ovaj problem je postao veoma jednostavan za rešavanje.

Primer 7

- Šta je pogrešno u ovom računu?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

Njutn-Lajbnicova formula

Primer 7

- Za početak treba uočiti da taj račun ne može biti tačan jer je rezultat negativan, a $f(x) = 1/x^2 \geq 0$.
- Osobina 6 za određeni integral glasi da ako je $f \geq 0$ onda je i

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Njutn-Lajbnicova formula

Primer 7

- Fundamentalna teorema važi za neprekidne funkcije na [-1, 3].

  - U ovom slučaju se ne može primeniti jer $f(x) = 1/x^2$ nije definisana u tački $x=0$ intervala [-1, 3].

    Kada se x približava 0, $f(x)$ neograničeno raste.

  - Tako da integral $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx$ ne postoji.

INVERZNI PROCESI

- Sada će biti data kompletna formulacija Fundamentalne teoreme integralnog računa.

FUNDAMENTALNA TEOREMA

- Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$.

- 1. Ako je $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, onda je g diferencijabilna funkcija na (a,b) i važi $g'(x) = f(x)$.

- 2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, gde je F primitivna funkcija od f, tj. $F' = f$.

INVERZNI PROCESI

- Treba uočiti da se prvi deo FT može zapisati i ovako:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

INVERZNI PROCESI

- Kako je $F'(x) = f(x)$, Njutn-Lajbnicova formula se može zapisati i na sledeći način:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

INVERZNI PROCESI

- Posmatrani zajedno ta dva dela Fundamentalne teoreme govore o tome da su diferenciranje i integracija uzajamno inverzni procesi.

ZAKLJUČAK

- Fundamentalna teorema je bez ikakve sumnje najvažniji rezultat diferencijalnog i integralnog računa.

ZAKLJUČAK

- Pre nego što je bila otkrivena—još od vremena starih Grka (Eudoksa i Arhimeda), pa do Galileja i Fermaa—problemi izračunavanja površina, zapremina i dužina krivih su bili toliko komplikovani da su samo genijalni matematičari pokušavali da ih reše.

ZAKLJUČAK

- Pomoću sistematizovane metode koju su Njutn i Lajbnic formulisali kroz Fundamentalnu teoremu, videćemo da se sada ti problemi mogu znatno lakše rešavati.