Prosečna vrednost funkcije

Teorema o srednjoj vrednosti za integrale

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Prosečnu ili srednju vrednost je lako izračunati ako imamo konačno mnogo brojeva $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

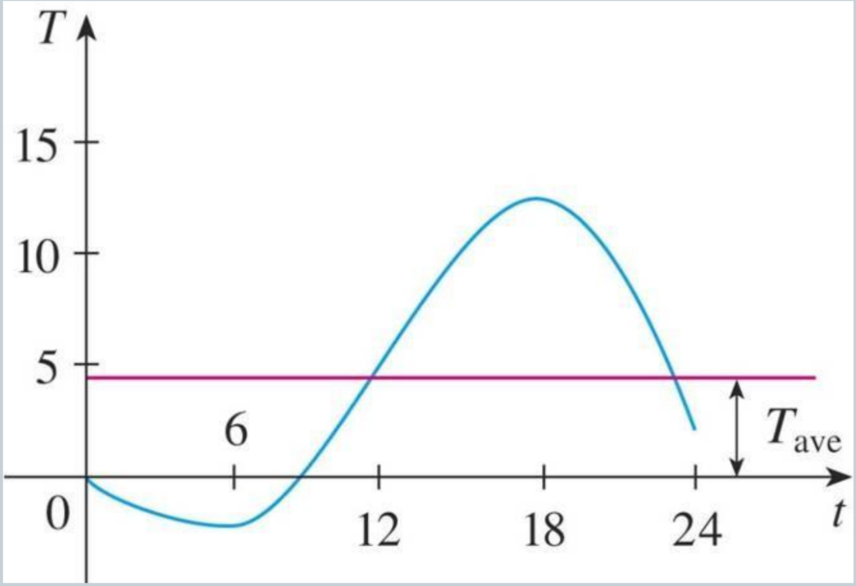
$$y_{ave} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Međutim, postavlja se pitanje kako da se, na primer, izračuna prosečna temperatura tokom dana ako je broj izvršenih merenja toliko veliki da se može smatrati beskonačnim?

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Na slici je prikazan grafik funkcije temperature $T(t)$, gde je:
  - t dato u satima
  - T u $^{\circ}C$
  - T_{ave} je pretpostavljena prosečna temperatura



PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- U opštem slučaju želimo da izračunamo prosečnu vrednost funkcije $y = f(x)$, za $a \le x \le b$.

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Počećemo sa podelom intervala $[a, b]$ na n jednakih podintervala dužine

$$\Delta x = (b - a) / n$$

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Zatim se odaberu tačke $x_1^*, \ldots, x_n^*$ iz svakog podintervala redom i izračuna prosečna vrednost brojeva $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + \ldots + f(x_n^*)}{n}$$

  - Na primer, ako *f* predstavlja funkciju temperature i $n = 24$, onda se vrednosti očitavaju svakog sata i računa njihova prosečna vrednost.

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Kako je $\Delta x = (b - a) / n$, odatle sledi $n = (b - a) / \Delta x$ i prosečna vrednost postaje:

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x \right]$$

$$= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Kada bismo pustili da se *n* povećava, račun bi se sveo na izračunavanje prosečne vrednost velikog broja veoma bliskih vrednosti.
  - Na primer, računala bi se prosečna vrenost na osnovu očitavanja koja bi se uzimala svakog minuta ili čak svake sekunde.

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Na osnovu definicije određenog integrala, granična vednost je:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Dakle, prosečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ se definiše sa:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

PROSEČNA VREDNOST FUNKCIJE

Primer 1

- Naći prosečnu vrednost funkcije $f(x) = 1 + x^2$ na intervalu [-1, 2].

PROSEČNA VREDNOST

Primer 1

- a = -1 i b = 2, tako da sledi:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}\left(1+x^2\right)\,dx$$

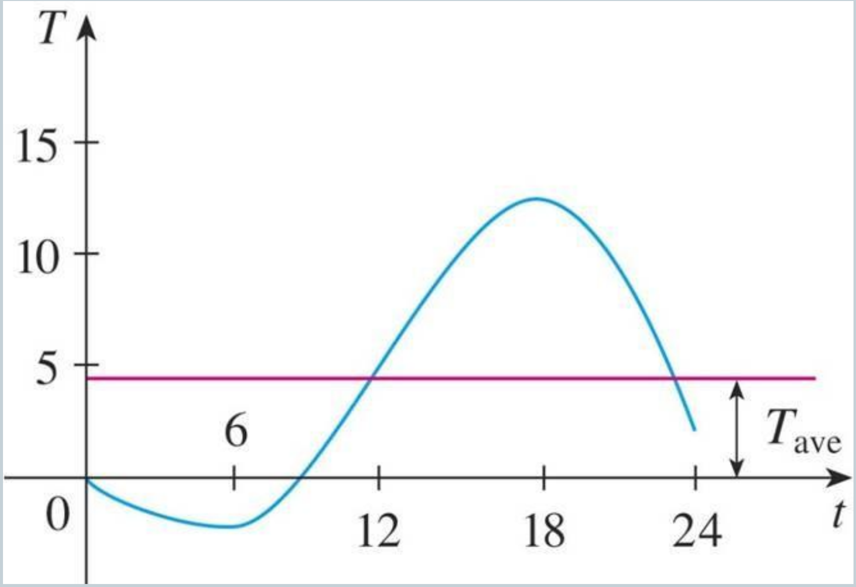
$$= \frac{1}{3}\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2$$

PROSEČNA VREDNOST

- Ako je $T(t)$ funkcija temperature u vremenu t, postavlja se pitanje da li postoji određeni trenutak u kome je temperatura baš bila jednaka prosečnoj temperaturi?

PROSEČNA VREDNOST

- Za funkciju temperature čiji je grafik dat na slici, vidimo da je u dva vremenska trenutka temperatura bila jednaka prosečnoj – neposredno pre podneva i ponovo kasnije, malo pre ponoći.



PROSEČNA VREDNOST

- U opštem slučaju, da li postoji broj c u kom je vrednost funkcije f baš jednaka prosečnoj vrednosti funkcije, tj. $f(c) = f_{ave}$?

TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI ZA INTEGRALE

- Teorema o srednjoj vrednosti za integrale govori o tome da za neprekidne funkcije taj broj postoji.

TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI ZA INTEGRALE

- Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, onda postoji broj c iz $[a, b]$ takav da važi

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

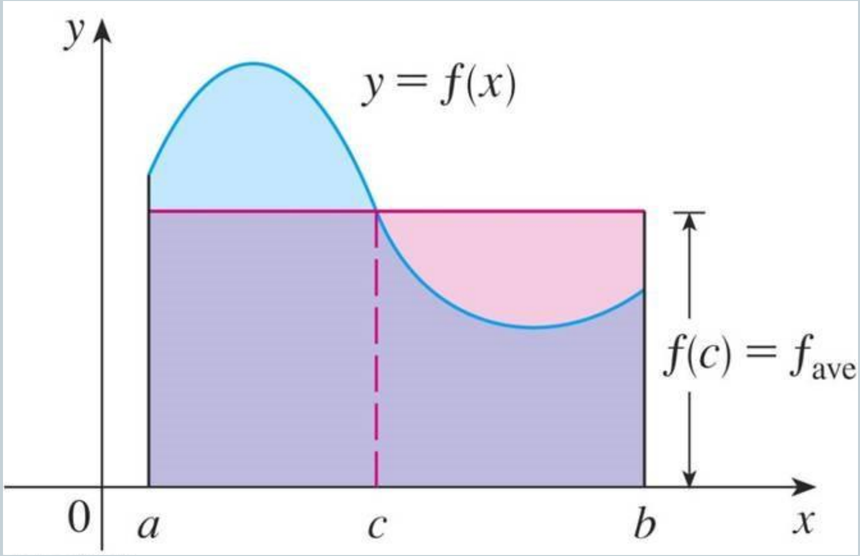
TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI ZA INTEGRALE

- Teorema o srednjoj vrednosti za integrale je posledica Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti za izvode i Fundamentalne teoreme integralnog računa.

TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI ZA INTEGRALE

- Geometrijska interpretacija Teoreme o srednjoj vrednosti za integrale:

  za nenegativne funkcije f, postoji broj c takav da pravougaonik čija je osnova b-a a visina $f(c)$ ima istu površinu kao oblast ispod grafika krive funkcije f od a do b.



TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI ZA INTEGRALE

Primer 2

- Kako je $f(x) = 1 + x^2$ neprekidna funkcija na intervalu [-1, 2], Teorema o srednjoj vrednosti za integrale kaže da postoji broj c iz [-1, 2] takav da važi:

$$\int_{-1}^{2}\left(1+x^{2}\right)dx = f(c)[2-(-1)]$$

TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI ZA INTEGRALE

Primer 2

- U ovom slučaju, broj c se može eksplicitno naći.
  - Iz Primera 1, znamo da je $f_{ave} = 2$.
  - Dakle, za c važi $f(c) = f_{ave} = 2$.
  - Tako dobijamo jednačinu, $1 + c^2 = 2$.
  - Iz koje sledi: $c^2 = 1$.

TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI ZA INTEGRALE

Primer 2

- Dakle, u ovom slučaju, postoje dve vrednosti $c = \pm 1$ iz intervala $[-1, 2]$ za koje važi Teorema o srednjoj vrednosti za integrale.

TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI ZA INTEGRALE

- Primeri 1 i 2 su ilustrovani na slici.